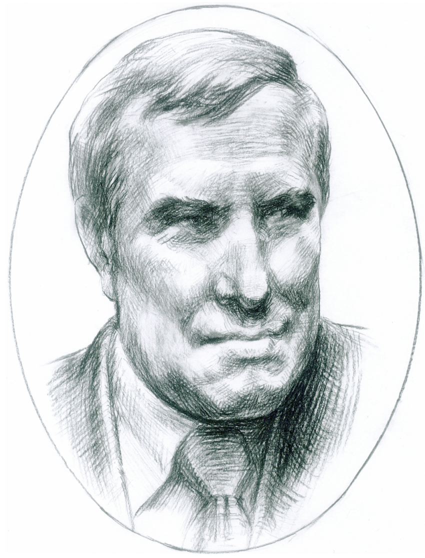
Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова

9 – 14 августа 2010 г., Одесса, Украина

Тезисы докладов

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
Институт математики, экономики и механики



Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова

9-14 августа 2010 г., Одесса, Украина

Тезисы докладов

Одесса: Астропринт, 2010

Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова. 9-14 августа 2010 г., Одесса, Украина: Тезисы докладов. – Одеса: Астропринт, 2010. - 100 с.

В сборнике содержатся тезисы докладов, представленных на Международной летней математической школе памяти В.А. Плотникова. Тематика научных докладов: асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления, математические методы оптимального управления, многозначные уравнения и включения, качественная теория дифференциальных уравнений и оптимального управления, математическое моделирование, теория игр.

Міжнародна літня математична школа пам'яті В.О. Плотнікова. 9-14 серпня 2010 р., Одеса, Україна: Тези доповідей. – Одесса: Астропринт, 2010. - 100 с.

У збірці містяться тези доповідей, представлених на Міжнародній літній математичній школі пам'яті В.О. Плотнікова. Тематика наукових доповідей: асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь і оптимального керування, математичні методи оптимального керування, багатозначні рівняння і включення, якісна теорія диференціальних рівнянь і оптимального керування, математичне моделювання, теорія ігор.

International summer mathematical school in memoriam V. A. Plotnikov. 9-14 August 2010, Odessa, Ukraine: Abstracts of reports. – Odesa: Astroprint, 2010. - 100 p.

The Collection contains abstracts of reports presented at the International summer mathematical school in memory V. A. Plotnikov. Subjects of scientific reports: asymptotic methods in the theory of differential equations and optimal control, mathematical methods of optimal control, multi-valued equations and inclusions, the qualitative theory of differential equations theory and optimal control, mathematical modeling, game theory.

Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова проводится в Одесском национальном университете имени И. И. Мечникова, который в 2010 году отметил 145 лет со дня основания.

В программу Международной летней математической школы памяти В.А. Плотникова включены доклады по следующим направлениям:

- асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления
- математические методы оптимального управления
- многозначные уравнения и включения
- качественная теория в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления
- математическое моделирование
- теория игр

Программный комитет

Сопредседатели:

Украина: А.М. Самойленко, А.А. Мартынюк, А.М. Ковалев
Россия: Ф.Л. Черноусько
Болгария: С. Додунеков

Члены программного комитета:

Украина: Н.А. Перестюк, А.А. Бойчук, В.А. Капустян, А.Г. Наконечный, А.А. Чикрий, Р.И. Петришин, Ю.В. Теплинский, Ф.Г. Гаращенко, Д.Я. Хусаинов, А.В. Плотников, А.Н. Витюк, В.М. Евтухов, Д.Д. Лещенко, В.И. Коробов, В.В. Пичкур
Россия: Л.Д. Акуленко, И.М. Ананьевский, А.Б. Васильева, М.Г. Дмитриев, В.И. Жуковский
Беларусь: Ф.М. Кириллова, А.И. Калинин
Грузия: И.Т. Кигурадзе
Болгария: А. Кендеров, А. Дончев, Л. Каранджулов, М. Константинов, Б. Юруков
Турция: А.Аширалиев

Организационный комитет

В.А. Смынтына (председатель), В.Е. Круглов (заместитель председателя), О.Д. Кичмаренко, А.Л. Рачинская, Н.В. Скрипник, А.Т. Яровой, Г.А. Ефимова, Н.А. Смирнова, А.П. Огуленко, А.К. Осадчий, Е.В. Платонова, Е.А. Булатников, А.Б. Васильев, Т.В. Бенумерова, В.В. Немерцалов

Секретариат

И.Ю. Кудрявцева, А.В. Дуборез, Т.Г. Балан

Міжнародна літня математична школа пам'яті В.О. Плотнікова проводиться в Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова, який в 2010 році відзначив 145 років від дня заснування.

У програму Міжнародної літньої математичної школи пам'яті В.А. Плотнікова включено доповіді за наступними напрямками:

- асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь і оптимального керування
- математичні методи оптимального керування
- багатозначні рівняння і включення
- якісна теорія в теорії диференціальних рівнянь і оптимального керування
- математичне моделювання
- теорія ігор

International summer mathematical school in memoriam V. A. Plotnikov is being held in Ukraine, Odessa on August, 9-14, 2010 at the Odessa I.I. Mechnikov National University, who in 2010 celebrated 145 years since its foundation.
The program of the International summer mathematical school in memoriam V. A. Plotnikov included reports on the following scientific subjects:

- asymptotic methods in the theory of differential equations and optimal control
- mathematical methods of optimal control
- multivalued equations and inclusion
- qualitative theory in the theory of differential equations and optimal control
- mathematical modeling
- game theory

Program committee

Co-chairmen:

Ukraine: A.M.Samoylenko, A.A.Martynuk, A.M.Kovalev
Russia: F.L.Chernousko
Bulgaria: S.Dodunekov

Members of program committee:

Ukraine: N.A.Perestyuk, A.A.Boychuk, V.O.Kapustyan, A.G.Nakonechniy, A.A.Chikriy, R.I.Petrishin, Yu.V.Teplinsky, F.G.Garaschenko, D.Ya.Khusainov, A.V.Plotnikov, A.N.Vityuk, V.M.Evtuhov, D.D.Leshenko, V.I.Korobov, V.V.Pichkur.
Russia: L.D.Akulenko, I.M.Ananyevskiy, A.B.Vasilyeva, M.G.Dmitriev, V.I.Jukovskiy.
Belarus: F.M.Kirillova, A.I.Kalinin
Georgia: I.T.Kiguradze
Bulgaria:A.Kengerov, A.Donchev, L.Karandjulov, M.Konstantinov, B.Yurukov
Turkey: A.Ashiraliev

Organizing committee

V.A.Smyntyna (chairman), V.E.Kruglov (vice-chairman), O.D.Kichmarenko, A.L.Rachinskaya, N.V.Skrypnik, A.T.Yarovoy, G.A.Efimova, N.A.Smirnova, A.P.Ogulenko, A.K.Osadchiy, E.V.Platonova, E.A.Bulatnikov, A.B.Vasilyev, T.V.Benumerova, V.V.Nemertsalov

Secretariat

I.Yu.Kudryavtseva, A.V.Duborez, T.G.Balan

ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВИЧ ПЛОТНИКОВ

Виктор Александрович Плотников — известный математик, основатель научной школы по теории асимптотических методов исследования дифференциальных уравнений с многозначной правой частью.

Виктор Александрович родился 5 января 1938 г. в городе Ленинграде в семье рабочих, во время Великой отечественной войны был жителем блокадного Ленинграда, затем семья переехала в г. Одессу.

Природа щедро одарила Виктора Александровича светлым умом, добрым сердцем, тонкой интуицией, чувством справедливости, любовью к людям.

Среднее образование Виктор Александрович получил в Одессе.

В 1955 г. В. А. Плотников поступил в Одесский государственный университет имени И. И. Мечникова. В то время на физико-математическом факультете университета доцент С. Н. Киро создал группу студентов, факультативно специализирующуюся в области вычислительной математики, в состав которой входили В. А. Плотников, П. Д. Варбанец, В. П. Марченко, В. А. Андриенко и др. После основных обязательных занятий для этой группы читались лекции по дополнительным главам численных методов, программированию на ЭВМ, решению задач на аналоговых вычислительных машинах. Эти студенты проходили практику в вычислительных центрах МГУ и АН СССР (Москва), Института Кибернетики АН УССР (Киев).

В 1959 г. была создана лаборатория вычислительной математики. В лаборатории была установлена первая в Одессе аналоговая вычислительная машина (АВМ) МПТ-9, которая позволяла решать системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами. Затем была установлена дополнительно АВМ МН-7 (модель нелинейная), которая позволяла решать системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений до седьмого порядка с некоторыми простыми нелинейностями. Для освоения опыта работы на машинах данного типа в 1959-1960 учебном году В. А. Андриенко и В. А. Плотников прошли производственную практику в Институте Прикладной механики МГУ. В это же время началось научное сотрудничество лаборатории с кафедрой "Теория механизмов и деталей машин" Одесского института инженеров морского флота, которую возглавлял известный ученый - профессор В. И. Небеснов. Возможности появившейся вычислительной техники открыли перспективы исследования совершенно новых задач в динамике судовых комплексов. Для решения этих задач на установленной в университете в 1962 г. цифровой вычислительной машине (ЦВМ) Урал-2 потребовалась разработка новых математических методов. В этом же году в Одесском университете несколько лекций прочитал заведующий отделом ВЦ АН СССР академик Н. Н. Моисеев. Его группа занималась проблемой оптимальных траекторий ракет с целью доставки ядерного оружия и запуска спутников. Дипломная работа В. А. Плотникова "Оптимизация траекторий многоступенчатых ракет", написанная под руководством проф. В. Ф. Котова, укладывалась в данную тематику и в 1963-1964 гг. В. А. Плотников прошел годичную стажировку в отделе Н. Н. Моисеева. Во время стажировки В. А. Плотников посещал семинары академика Н. Н. Моисеева в ВЦ АН СССР, лекции академика Л. С. Понтрягина в Институте математики АН СССР, лекции на механико-математическом факультете МГУ. Эта стажировка определила дальнейшие научные интересы Виктора Александровича в области оптимального управления и асимптотических методов. Уже в 1965 г. В. А. Плотников выступает с докладом "Решение одной задачи оптимального управления методом Беллмана" на конференции по оптимальному математическому программированию в Академгородке Новосибирска. В этом же году на конференции, посвященной 100-летию Одесского университета состоялся совместный доклад В. И. Небеснова и В. А. Плотникова на тему "Оптимальное управление главным двигателем при волнении".

Используемые Н. Н. Моисеевым при исследовании оптимальных траекторий ракет асимптотические методы, можно было применять к исследованию сложных систем, содержащих существенно различные по массе элементы, то есть к исследованию судовых комплексов. В связи с этим в последующие годы усиливаются взаимные научные связи Виктора Александровича с кафедрой проф. В. И. Небеснова и расширяется круг исследуемых задач оптимального управления:

В 1969 г. В. А. Плотников защитил в Одесском университете кандидатскую диссертацию “Исследование одного класса задач оптимального управления системами с двумя степенями свободы”. Научным руководителем диссертации был проф. В. И. Небеснов. Диссертация была посвящена числено-асимптотическим методам решения задач оптимального управления.

В 1972 г. В. А. Плотников становится заведующим кафедрой вычислительной математики и в составе кафедры создается секция, занимающаяся разработкой асимптотических методов в задачах оптимального управления и их приложением к исследованию динамики и оптимального управления механическими системами. В это же время создается студенческая группа, специализирующаяся в области оптимального управления. Результаты научной работы данной группы докладываются практически на всех всесоюзных конференциях по оптимальному управлению и публикуются в научных журналах.

В 1974 году на основе секции экстремальных задач кафедры вычислительной математики была организована кафедра оптимального управления (с 1996 г. — кафедра оптимального управления и экономической кибернетики). Виктор Александрович заведовал кафедрой до последних минут своей жизни. В 1974 г. на базе Одесского университета прошла III Всесоюзная конференция по теории игр. Председателем оргкомитета конференции был Н. Н. Моисеев. Основную организационную работу по проведению конференции в университете выполняла только что созданная кафедра оптимального управления. В работе конференции приняли участие многие известные ученые по теории игр и оптимальному управлению, в том числе Н. Н. Красовский, Н. Н. Воробьев, Б. Н. Пшеничный, Ю. Б. Гермейер, М. С. Никольский.

В 1980 г. В. А. Плотников защитил в Ленинградском университете докторскую диссертацию на тему “Асимптотические методы в задачах оптимального управления” (научный консультант проф. В. И. Небеснов, оппоненты академик Н. Н. Моисеев, проф. А. А. Первозванский, проф. В. С. Новоселов).

С 1982 г. В. А. Плотников — профессор кафедры оптимального управления. В 1987-1988 уч. году — декан механико-математического факультета. С 1986 г. — председатель специализированного ученого совета по защите кандидатских диссертаций по математике при Одесском университете. В 1997 г. получил звание Соросовского профессора.

Виктор Александрович основал научную школу по теории асимптотических методов исследования дифференциальных уравнений с многозначной и разрывной правой частью Виктором Александровичем и его учениками было получено обоснование теорем Н. Н. Боголюбова и А. Н. Тихонова для дифференциальных включений, обосновано построение асимптотического решения задачи Коши и краевой задачи для систем дифференциальных уравнений, содержащих сингулярные возмущения, запаздывание, импульсные воздействия на конечном и бесконечном промежутках; доказаны теоремы существования и единственности решений квазидифференциальных уравнений в локально-компактных и полных метрических пространствах, обоснован метод усреднения для квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах; разработан алгоритмы численных и численно-асимптотических методов решения задач оптимального управления. Разработка этих вопросов имеет значение не только как обобщение теории дифференциальных уравнений, но и благодаря многочисленным приложениям к исследованию задач оптимального управления, теории игр, экономики. Результаты в данном направлении положили начало математическим исследованиям асимптотических методов в теории дифференциальных включений в России, Белоруссии, Болгарии, Польше, Франции, США. Эти результаты докладывались на многочисленных международных, всесоюзных и республиканских конференциях.

В. А. Плотников опубликовал более 250 научных и научно-методических работ, в т.ч. 4 монографии.

Математический талант ученого сочетался с педагогической деятельностью Виктора Александровича. Он блистательно читал лекции, много сил отдал работе со своими учениками. Виктор Александрович подготовил 21 кандидата наук из Ураины, Алжира, Болгарии, Вьетнама, Иордании.

В своей научной деятельности Виктор Александрович сотрудничал с представителями различных математических школ: Института математики АН СССР, кафедры оптимального управления МГУ, кафедры вычислительной математики физического факультета МГУ, Института математики Белорусской АН, Санкт-Петербургского университета, а также Свердловской, Иркутской, Новосибирской, Киевской, Харьковской, Черновицкой и Болгарской научных математических школ. Его научные результаты широко известны не только в Украине и странах бывшего Советского Союза, но и за рубежом.

Лекции Виктора Александровича Плотникова слушали не только в Одессе, но и в Болгарии, Польше, Черновцах.

В. А. Плотников был членом редакционных коллегий в журналах "Вестник Одесского государственного университета", "Нелинейные колебания"; рецензировал статьи во многих отечественных и зарубежных журналах.

4 сентября 2006 г. Виктора Александровича не стало. Всю свою жизнь он посвятил математике, он ежедневно и до последнего вздоха занимался научной работой.

Открытось, искренность, преданность делу всегда выделяли Виктора Александровича. В нашей памяти Виктор Александрович останется как талантливый ученый и замечательный учитель, который любил жизнь во всех ее проявлениях.

TO THE THEORY OF MAPPINGS ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

O. S. Afanas'eva
IAMM, NASU, Donetsk, Ukraine
e-mail: smolovayaes@yandex.ru

Let $\Gamma = \{\gamma\}$ be a set of curves in Riemannian manifold (M^n, g), $(n \geq 2)$. Borel measurable nonnegative functions $\rho : M^n \to R_+$ satisfying $\int\limits_\gamma \rho\, ds \geq 1\ \forall\ \gamma \in \Gamma$ are called admissible functions for Γ, abbr. $\rho \in adm\ \Gamma$. Modulus of Γ is the quantity $M(\Gamma) := \inf \int\limits_{M^n} \rho^n dv$ where the infimum is taken over all $\rho \in adm\ \Gamma$. The volume element in M^n is generated by the invariant form $dv = \sqrt{|detg_{ij}|}\ dx^1...dx^n$ where $g = g_{ij}$ – metric tensor. A domain D is called locally connected at a point $x_0 \in \partial D$ if $\forall\ U_{x_0}\ \exists\ \ V_{x_0} \subseteq U_{x_0} : V_{x_0} \cap D$ is connected. The boundary of D is weakly flat at a point $x_0 \in \partial D$ if $\forall\ P > 0\ \forall\ U_{x_0}$ $\exists\ V_{x_0} \subseteq U_{x_0} : M(\Delta(E, F; D)) \geq P$ for all continua E and F in D intersecting ∂U and ∂V.

Let D be a domain in (M^n, g), D_* in (M^n_*, g^*), $n \geq 2$, $Q : D \to$ $\to [0, \infty]$. Set $A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in D : r_1 < d(x, x_0) < r_2\}$ be a geodesic ring, where d is a geodesic distance in (M^n, g). Homeomorphism $f : D \to D_*$ is a ring Q – homeomorphism at a point $x_0 \in \overline{D}$ if $M\left(\Delta(f\mathrm{C}_0, f\mathrm{C}_1, D_*)\right) \leq \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^n\left(d(x, x_0)\right) dv(x)\ \forall$ $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, $\forall$ continua $\mathrm{C}_0 \subset \overline{B(x_0, r_1)}$, $\mathrm{C}_1 \subset M^n \setminus B(x_0, r_2)$ and $\forall\ \eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$: $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$.

Theorem. *Let (M^n, g), (M^n_*, g^*) $(n \geq 2)$ be compact Riemannian manifolds, D be a domain in (M^n, g) which is locally connected at ∂D, D_* in (M^n_*, g^*) with a weakly flat boundary. $Q \in L^1(D)$ and* $\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} dt \left(\int\limits_{D(x_0, r)} Q(x) d\mathcal{A} \right)^{-\frac{1}{n-1}} = \infty \quad \forall\ x_0 \in \partial D$ *where* $D(x_0, r) =$ $= \{x \in D : d(x, x_0) = r\}$ *Then every ring Q-homeomorphism $f : D \to D_*$ admits a homeomorphic extension $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

UNIFORM DIFFERENCE SCHEMES FOR PARABOLIC PERTURBATION PROBLEMS

A. Ashyralyev
Department of Mathematics
Fatih University
e-mail: aashyr@fatih.edu.tr

We consider the single-step uniform difference schemes for the solution of boundary value parabolic perturbation problem

$$\epsilon v'(t) + Av(t) = f(t) + p(0 \leq t \leq 1), v(0) = \varphi, v(1) = \psi$$

in arbitrary Banach space E with the strongly positive operator A and with an arbitrary ϵ parameter multiplying the derivative term are presented. Here p is the unknown parameter. The exact estimates in Hölder norms for the solution of these difference schemes are established.

[1] **Ashyralyev A.** New Difference Schemes for Partial Differential Equations / A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii // Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2004. – 445 p.

A NOTE ON BOUNDARY VALUE PARABOLIC PROBLEMS

A. Ashyralyev, O. Demirdag
Department of Mathematics
Fatih University
e-mail: aashyr@fatih.edu.tr

The boundary value problem of determining the parameter p of a parabolic equation

$$v'(t) + Av(t) = f(t) + p(0 \leq t \leq 1), v(0) = \varphi, v(1) = \psi$$

in arbitrary Hilbert space H with the positive operator A is considered. The well-posedness of this problem is established. In applications, exact estimates for the solution of the boundary value problems for parabolic equations are obtained.The first and second orders of accuracy stable difference schemes for the approximate solution this problem are investigated. Numerical techniques are tested on an example.

[1] **Ashyralyev A.** New Difference Schemes for Partial Differential Equations / A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii // Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2004. – 445 p.

WELL-POSEDNESS OF THE INVERSE PROBLEM OF A MULTIDIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

A. Ashyralyev, A. S. Erdogan
Department of Mathematics
Fatih University
e-mail: aashyr@fatih.edu.tr, aserdogan@fatih.edu.tr

We consider the boundary value problem for the multidimensional parabolic equation

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum\limits_{|r|=2m} a_r(x) \frac{\partial^{|r|} u(t,x)}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}} - \sigma u\left(t,x\right) + p(t) q\left(x\right) + \\ + f(t,x),\ x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T, |r| = r_1 + r_2 + \cdots + r_n, \\ u(0,x) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n, \\ u\left(t,x^*\right) = \rho\left(t\right), 0 \le t \le T,\ x^* \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \ne \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1)$$

where $u\left(t,x\right)$ and $p\left(t\right)$ are unknown functions, $a_r\left(x\right) \ge \delta > 0$ is sufficiently smooth function and $\sigma > 0$ is a sufficiently large number.

Under some conditions on $q\left(x\right)$, well-posedness of problem (1) in Hölder space is established. Coercive stability estimates of the first and second orders of accuracy difference schemes for the approximate solution of the problem (1) are established. Numerical techniques are tested on an example.

[1] **Samarskii A. A.** Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics / A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich // Inverse and Ill-posed Problems Series, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2007. – 436 p.

[2] **Ashyralyev A.** Well-Posedness of Parabolic Difference Equations / A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii // Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1994. – 436 p.

ON MULTIPOINT NONLOCAL ELLIPTIC-PARABOLIC DIFFERENCE PROBLEMS

A. Ashyralyev[1], O. Gercek[2]
[1] Department of Mathematics
Fatih University
e-mail: aashyr@fatih.edu.tr,

[2] Vocational School
Fatih University
e-mail: ogercek@fatih.edu.tr

We study the first order of accuracy difference scheme for the approximate solution of the multipoint nonlocal boundary value problem

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), \ (0 \leq t \leq 1), \\ \frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), \ (-1 \leq t \leq 0), \\ u(1) = \sum\limits_{i=1}^{J} \alpha_i u(\lambda_i) + \varphi, \ \ \sum\limits_{i=1}^{J} |\alpha_i| \leq 1, \\ -1 \leq \lambda_1 < \cdots < \lambda_i < \cdots < \lambda_J \leq 0. \end{cases} \tag{1}$$

The well-posedness of this difference scheme in Hölder space is established. In applications, coercivity inequalities for approximate solutions of the nonlocal boundary value problems for elliptic-parabolic equations are obtained.

[1] **Ashyralyev A.** Nonlocal boundary value problems for elliptic-parabolic differential and difference equations / Ashyralyev A., Gercek O. // Discrete Dynamics in Nature and Nature. – Vol. 2008, 1-16 p. – 2008.

[2] **Ashyralyev A.** On second order of accuracy of the approximate solution of nonlocal elliptic-parabolic problems / Ashyralyev A., Gercek O. Abstract and Applied Analysis, in press.

FILIPPOV–PLISS LEMMA AND RELAXATION OF FINITE AND INFINITE DIMENSIONAL MULTIVALUED SYSTEMS

TZANKO DONCHEV
Department of Mathematics
University of Architecture Civil Engineering, 1046 Sofia, Bulgaria
e-mail: tzankodd@gmail.com

Our talk is devoted to some extensions and their application of the following theorem known as lemma of Filippov–Pliss:

Theorem 1. *(Pliss) Let* $D_H(F(t,\ x),\ F(t,\ y)) \le L(t,r)$ *for* $|x-y| \le r$, *where* $L(\cdot,\cdot)$ *is an integrally bounded Caratheodory function from* R^2 *to* R^+, *such that* $L(\cdot,0)=0$ *and let* $F(\cdot,x)$ *be measurable, with closed convex values. If* $x(\cdot)$ *is* AC *and satisfies* $dist(\dot{x}(t),F(t,x(t))) \le f(t)$, *where* $f(\cdot)$ *is a nonnegative* L_1 *function, then there exists a solution* $y(\cdot)$ *of*

$$\dot{y}(t) \in F(t,y(t)), y(0)=y_0$$

such that

$$|x(t)-y(t)| \le r(t), |\dot{x}-\dot{y}| \le L(t,r(t))+f(t),$$

for almost all $t \in [0,T]$. *Here* $r(\cdot)$ *is the maximal solution of the differential equation*

$$\dot{r}(t) = L(t,r(t))+f(t), r(0)=|x(0)-y_0|. \tag{1}$$

First we extend this theorem in case of nonconvex valued $F(\cdot,\cdot)$.

We consider ordinary differential inclusions in finite dimensional spaces with almost upper semicontinuous right-hand sides. All problems with practical interest satisfy *one sided condition.*

In case of almost continuous right-hand side, we show that for almost all right-hand sides the relaxation theorem saying that the set of original solution is dense in the set of relaxed ones. It is also shown that Bogolyubov's theorem used in optimal control theory is valid for almost all such a problems.

These results are then extended in case of evolution inclusions in evolution triples. Most of the results are new in the last case.

Some open problems and possible further investigation targets are discussed.

STABILITY FOR THE SOLUTIONS OF PARABOLIC EQUATIONS WITH "MAXIMA"

Tzanko Donchev [1] Nikolay Kitanov [2] Dimitar Kolev[3]

[1]Department of Mathematics, University of Architecture and Civil Engineering, 1 "Hr. Smirnenski" str., 1046 Sofia, Bulgaria,
e-mail: tzankodd@gmail.com

[2]Institute of Mathematics and Informatics - BAS, 1 "Tr. Kitanchev" str., Blagoevgrad, Bulgaria
e-mail: nkitanov@abv.bg

[3]Department of Mathematics, University of Chemical Technology and Metallurgy, Climent Ohridsky 8, Blvd., Sofia 1756, Bulgaria
e-mail: mkolev@math.uctm.edu, kolev@uctm.edu

In this paper we study a class of reaction-diffusion equations under initial and boundary conditions and with nonlinear reaction terms containing "maxima". Two stability criteria are established for such equations with reaction functions (source) subject to different rates. The existence and uniqueness as well the asymptotic behavior of the solutions are discussed.

The above mentioned equations can be successfully used for mathematical simulation in theoretical physics, optimal control, chemistry, mechanics of materials, biology, ecology, etc.

[1] V. G. Angelov, D. D. Bainov, On the functional differential equations with \active@prefix "\normal@char" maximums\active@prefix "\normal@char" , *Appl. Anal.* 16, (1983), 187-194.

[2] D. D. Bainov, D. P. Mishev, Oscillation Theory for Neutral Differential Equations with Delay, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York, IOP Publishing Ltd 1991.

[3] D. Bainov, V. Petrov, V. Proytcheva, Oscillatory and asymptotic behaviour of second order neutral differential equations with \active@prefix "\normal@char" maxima\active@prefix "\normal@char" , *Dynamic Systems and Applications,* 4 (1995), 137-146.

[4] Ya. V. Bykov, T. Ch. Kultaev, Oscillation of solutions of a class of parabolic equations, *Izv. Acad. Sci. Kirgiz. SSR,* 6, 6 (1983), 3-9 (in Russian).

[5] A. R. Magomedov, On some questions about differential equations with maxima, Izv. Akad. Nauk Azerbaidzhan. *SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Mat. Nauk* 1 (1977), 104-108 (in Russian).

[6] D. P. Mishev, Oscillatory properties of the solutions of parabolic differential equations of neutral type with maxima, *Godishnik Vissh. Uchebn. Zaved. Prilozhna Mat.* 2 (1989), 19-28.

[7] C. V. Pao, Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Plenum Press, New York, 1992.

[8] N. Yoshida, Oscillation of nonlinear parabolic equation with functional arguments, *Hiroshima Mathematical Journal,* 16 (1986), 305-314.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR SINGULARLY PERTURBED IMPULSIVE SYSTEM

L. I. Karandzhulov
Differential equations department
Technical University-Sofia, Bulgaria
e-mail: likar@tu-sofia.bg

We consider a singularly perturbed system

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = f(t,x,\varepsilon),\ t \in [a,b],\ t \neq \tau_i,\ i = \overline{1,p}, 0 < \varepsilon << 1, \quad (1)$$

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p < \tau_{p+1} = b,$$

with boundary condition

$$l(x) = v \quad (2)$$

and generalized impulse conditions at fixed time instants

$$N_i x(\tau_i + 0) + M_i x(\tau_i - 0) = h_i,\ i = \overline{1,p}. \quad (3)$$

The nonlinear differential equations (1) is considered in critical case of conditional stability [1-3]. Construct an asymptotic expansion of a solution to problem (1-3) so that it wold tend to one of the solutions to the degenerate system ($\varepsilon = 0$) for $t \in (a,b]\backslash\{\tau_1,\ldots,\tau_p\}$ and $\varepsilon \to 0$.

[1] **Vasil'eva A. B.** Singularly Perturbed Equations in Critical Cases(in Russian) / Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. – Moscow: Moscow Univ., 1976.

[2] **Samoilenko A. M.** Noether's Boundary Value Problem with Singular Perturbation / Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Karandzhulov L. I. // Diff. Equat. – 2001. – V. 37, No 9. – 1186–1193 p.

[3] **Karandzhulov L. I.** The Generalized Cauchy Problem for Singularly Perturbed Impulsive Systems in Critical Case / Karandzhulov L. I., Stoyanova Ya. P. // Sib. Math. J. – 2006. – V. 47, No 2. – 229–351 p.

COMPACTNESS OF REGULAR SOLUTIONS FOR THE BELTRAMI EQUATIONS

T. Lomako
Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine
tlomako@yandex.ru

The Beltrami equation in C is the equation of the form

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z \tag{1}$$

where $|\mu(z)| < 1$ a. e. A homeomorphism f of the Sobolev class $W^{1,1}_{loc}$ is called a regular solution of the Beltrami equation if f satisfies (1) a. e. and $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ a. e. in C. A function $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ is called strongly convex if Φ is non-decreasing convex and $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t)/t = \infty$. Denote by F^{Φ}_{M} the collection of all homeomorphisms $f : \overline{C} \to \overline{C}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$, which are regular solutions of the Beltrami equation with μ such that $\int\limits_{\mathbf{C}} \Phi\left(K_\mu(z)\right) dS(z) \leq M$ where $K_\mu(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ and $dS(z) = \frac{dxdy}{(1+|z|^2)^2}$ is the element of the spherical area.

Theorem. *Let $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ be strongly convex and continuous from the left at the point $Q = \sup\{t : \Phi(t) < \infty\}$ in the sense of $\overline{R^+}$. If for some $\Delta > \Phi(0)$*

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty\,, \tag{2}$$

then the class F^{Φ}_{M} is sequentially compact with respect to the uniform convergence in the spherical metric on $\overline{C}$.

Remark. One can show that the condition (2) is necessary for compactness of the classes F^{Φ}_{M}. Theorems on the existence of regular solutions are known under the condition (2), see [1], cf. [2].

[1] **Ryazanov V.** Integral conditions in the theory of the Beltrami equations // arXiv:1001.2821v11 [math.CV], 12 Apr 2010. – P. 1–26.

[2] **Gutlyanskii V.** On the degenerate Beltrami equation / Gutlyanskii V., Martio O., Sugawa T., Vuorinen M. // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005. – 357, No. 3. – P. 875–900.

THE EXPONENTIAL CHARACTERISTIC OF LINEAR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE PROBLEM IN BANACH SPACE

Orlik L. K.
Russian State Social University, Moscow
e-mail: Lubov.orlik@gmail.com

Consider the differential-difference problem:

$$L(y) - \sum_{j=1}^{n} A_j(t) y(t - a_j) = f(t); \qquad y \Big|_{t \le 0} = 0 \qquad (1)$$
$$o < a_1 < \ldots < a_n < +\infty, \; 0 \le t < +\infty$$

Here $L(y) = y^{(m)} + P_1(t) y^{(m-1)} + \ldots + P_m y$, $P_i(t)\left(i = \overline{1,m}\right)$ and $A_j(t)\left(j = \overline{1,n}\right)$ are families of bounded linear almost periodic compact operators which act in Banach space X and $f(t)$, $y(t)$ are continuous vector-functions whose values lie in X. Let

$$E_\alpha = \left\{ f(t) : \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(t^{-1} ln \|f(t)\|_X\right) < \alpha + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \right\}.$$

The totality of solutions $y(t)$ is covered by E_β for β sufficiently large if $f(t)$ ranger over $B_\alpha \supset E_\alpha \bullet B_\alpha$ is a Banach space which respect to the norm

$$\|f\|_{B_\alpha} = \sup_{0 \le t < \infty} \|f(t)\|_X e^{-\alpha t}$$

Denote by $\inf \beta = æ(\alpha)$ and is called exponential characteristic of problem (1).

Theorem *There exists an* $(-\infty <)\alpha_0 \le \beta_0 \le \gamma_0 (< +\infty)$ *such that* $æ(\alpha) = \beta_0$ *for* $\alpha \le \alpha_0$; $æ(\alpha) = \alpha$ *for* $\alpha \ge \gamma_0$; $æ(\alpha)$ *is increasing function on* (α_0, γ_0). *That is has the cvazicanonical form.*

For problem (1) with periodic coefficients we get $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0$ and $æ(\alpha) = \max(\alpha, \alpha_0)$.

[1] **Orlik L. K.** The exponential characteristic of first-order linear differential equations and Volterra integral equations of the second kind / Orlik L. K., Mudrakova O. A. // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 147, No. 1, 2007. – P. 6454–6457.

SET-VALUED DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GENERALIZED DERIVATIVE

A. V. Plotnikov[1], N. V. Skripnik[2]
[1]Department of Applied Mathematics
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
[2]Department of Optimal Control and Economic Cybernetics
Odessa National University
e-mail: a-plotnikov@ukr.net, talie@ukr.net

Let $conv(R^n)$ be the space of all nonempty convex compact subsets of R^n, $X : R \to conv(R^n)$ be the set-valued mapping.

Consider four types of limits:

(a) $\lim\limits_{t\downarrow t_0} \frac{1}{t-t_0}(X(t) \overset{h}{-} X(t_0))$, (b) $\lim\limits_{t\downarrow t_0} \frac{1}{t-t_0}(X(t_0) \overset{h}{-} X(t))$,

(c) $\lim\limits_{t\uparrow t_0} \frac{1}{t_0-t}(X(t_0) \overset{h}{-} X(t))$, (d) $\lim\limits_{t\uparrow t_0} \frac{1}{t_0-t}(X(t) \overset{h}{-} X(t_0))$.

Using the properties of the Hukuhara difference we have that only the following combinations of limits can exist: 1) (a) and (c); 2) (b) and (d); 3) (b) and (c); 4) (a) and (d).

Definition. If the corresponding two limits exist and are equal to $DX(t_0)$ the mapping $X(\cdot)$ is called differentiable in the generalized sense at the point t_0 and $DX(t_0)$ is called the generalized derivative.

Consider the following differential equation with the generalized derivative

$$DX(t) = F(t, X(t)) + 0 \cdot sign\varphi(t),\ X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

where $t \in [t_0, T]$ is time, $X : [t_0, T] \to conv(R^n)$, $F : [t_0, T] \times \times conv(R^n) \to conv(R^n)$ are set-valued mappings, $X_0 \in conv(R^n)$, $\varphi : [t_0, T] \to R$ is a continuous function.

Definition. A set-valued mapping $X_\varphi : [t_0, T] \to conv(R^n)$ is called the solution of the differential equation (1) if it is absolutely continuous in the generalized sense, satisfies (1) almost everywhere on $[t_0, T]$ and

$$diam X_\varphi(t) = \begin{cases} \text{does not decrease when} & \varphi(t) \geq 0, \\ \text{does not increase when} & \varphi(t) \leq 0. \end{cases}$$

In the report the properties of the generalized derivative, the existence theorem for system (1) and various examples are considered.

ВЛИЯНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ НА МАКРОЭКОНОМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ: БАЗОВАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

А. Н. Авинова
Кафедра прикладной математики и информатики
Российский Государственный Социальный Университет
e-mail: avinovskaya_n@mail.ru

В условиях кризиса и экономической нестабильности возрастает роль математического моделирования для анализа и прогноза развития социально-экономической ситуации в различных странах мира. Опыт последних десятилетий показал, что характер функционирования и устойчивость экономики существенным образом зависит от особенностей воспроизводственных процессов. Эти особенности определяют вид производственных функций, используемых в процессе экономического анализа и моделирования. Традиционно в макроэкономических исследованиях считается, что при увеличении масштабов производства предельные издержки повышаются (отдача от факторов производства уменьшается). Так, в наиболее часто используемой в макроэкономике производственной функции типа Кобба-Дугласа $F = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$, где K – капитал, а L – труд, показатели степени α и β предполагаются меньшими единицы, что отражает уменьшающуюся отдачу от данных факторов производства. Однако данная ситуация является отнюдь не всеобщей, как на уровне экономик отдельных стран, так и на уровне отдельных отраслей экономики. К сожалению, исследования экономических процессов, для которых характерно снижение предельных издержек, достаточно редки. Представленная работа направлена на устранение данного пробела. Для анализа особенностей функционирования экономики, в состав которой входят отрасли как с повышающимися, так и с понижающимися предельными издержками, использована динамическая воспроизводственная неравновесная математическая модель, описывающая движение продуктовых и денежных потоков между основными секторами экономики в краткосрочном периоде.

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Л. Д. Акуленко[1], Я. С. Зинкевич[2], Д. Д. Лещенко[2],
А. Л. Рачинская[3]
[1] Институт проблем механики РАН, Москва, Россия
e-mail: kumak@ipmnet.ru
[2] Кафедра теоретической механики
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
e-mail: yaninaz@mail.ru, leshchenkodmytro@gmail.com
[3] Кафедра теоретической механики
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
e-mail: rachinskaya@onu.edu.ua

Аналитически и численно исследуются задачи синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений симметричного твердого тела. Предполагается, что в первой задаче тело содержит сферическую полость, заполненную жидкостью большой вязкости. Во второй задаче тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется точечной массой, прикрепленной демпфером в точке на оси симметрии. В третьей задаче тело соеденено с массой посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Кроме того, во всех задачах на твердое тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Управление вращениями проводится с помощью момента сил, ограниченного по модулю.

Проведен анализ осевого вращения для управляемого движения тела и анализ вращений тела в экваториальной плоскости. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений в форме синтеза, время быстродействия (функция Беллмана), установлены качественные свойства оптимального движения.

УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ НА РЫНКЕ ЦЕННЫХ БУМАГ

В. А. Андриенко [1], В. М. Андриенко [2],
Кафедра математического нализа
[1] Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
e-mail: andrienko.v@gmail.com
[2] Одесский национальный политехнический университет

Целью данной работы является исследование и анализ качественно нового подхода к управлению инвестиционным портфелем, основанного на применении теории нечетких множеств [1],[2].

Основные принципы и идея метода:

1. Риск плортфеля – это не его волатильность, но возможность того, что ожидаемая доходность портфеля окажется ниже некото рой предустановленной плановой величины.

2. Корреляция активов в портфеле не рассматривается и не учитывается.

3. Доходность каждого актива – это неслучайное нечеткое число (например, треугольного или интервального вида). Аналогично, ограничение на предельно низкий уровень доходности может быть как обычным скалярным, так и нечетким числом произвольного вида. Таким образом, два источника информации (средняя доходность и волатильность актива) сводятся в один (расчетный коридор доходности или цены) и тем самым два источника неопреде-ленности объединяются в один.

4. Оптимизировать портфель в такой постановке означает максимизировать ожидаемую доходность портфеля в момент времени времени T при фиксированном уровне риска портфеля.

При этом риск портфеля трактуется как вероятность того, что реальная доходность окажется ниже некоторого критериального значения R^* (четкого или нечеткого). Этот риск вызывается тем, что доходности акций определяются по имеющейся предыстории т. е. основаны на прошлых данных, а реальная доходность портфеля определяется в будущий момент времени и может существенно отличаться от исходных данных. С целью снижения ожидаемого риска при построении инвестиционного портфеля целесообразно использовать не текущие, а прогнозные значения активов, получен-ные на основе моделирования динамики цен активов.

[1] **Зайченко Ю. П.** Нечеткий метод индуктивного моделирования в задачах прогнозирования макроэкономических показателей /Зайченко Ю. П. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. – № 3. – С. 25–45.

[2] **Недосекин А. О.** Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций / Недосекин А. О. – СПб: Сезам, 2002. – 182 с.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ПОДХОД К ФИНАНСОВОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ БИРЖЕВОЙ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ

В. А. Андриенко, А. Ш. Тулякова
Кафедра математического анализа
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
e-mail: andrienko.v@gmail.com, tannasha@mail.ru

Г.Шафер и В.Вовк [1] предложили новый подход к пониманию вероятности и соответствующего финансового моделирования, который они назвали "теоретико-игровым". В его основе лежит не предположение о существовании некоторого механизма случайности (датчика случайности)типа бросания монеты, колеса рулетки и т.п., а только предположение о возможности делать денежные ставки на будующий ход событий. Мы применили этот подход в часто встречающейся ситуации на бирже, когда спекулянт A, желая обанкротить некоторую фирму, играет на понижение и вынужден "сразиться" со своим контрагентом B. Какова должна быть оптимальная стратегия игорока B, чтобы не проиграть спекулянту бесконенчно большую сумму? Несложно показать [1], что игрок B должен придерживаться многих вероятностных законов, в частности усиленного закона больших чисел, некоторого варианта центральной предельной теоремы. Таким образом, предположение о возможности делать произвольные денежные ставки на будущие события влечет за собой выполнение известных вероятностных законов, получаемых в предположении о существовании датчика случайности. Эти выводы реализуются и в более сложных моделях финансовых игр, где принимают уастие три игрока.

[1] **Shafer G., Vovk V.** Probability and Finance. It's Only a Game / Shafer G., Vovk V. – Chichester: Wiley, 2001. – 414 p.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОИСКОВЫХ АЛГОРИТМОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С. Г. Антощук, А. А. Николенко, Ю. А. Клих
Кафедра информационных систем
Одесский национальный политехнический университет
e-mail: anatolyn@ukr.net

При обработке информации для решения задач оптимизации, адаптации и обучения широко используются итерационные методы поиска экстремума, в которых в качестве критерия оптимальности используется равенство нулю градиента. Однако в присутствии шумов оценка градиента затруднена и поэтому направление поиска выбирается неправильно. Для устранения недостатков операции дифференцирования предложено в поисковых алгоритмах вместо оценки градиента использовать значение вейвлет-преобразования (ВП) с нечетными симметричными базисными вейвлет функциями [1]. Тогда, например, квазиньютоновский алгоритм описывается соотношением:

$$x_{k+1} = x_k + W(Wf(x_k))/Wf(x_k), \tag{1}$$

где x_{k+1}, x_k – соответствующие приближения координаты экстремума; $f(x_k)$ – значение функции в точке x_k; W – ВП функции. Для сокращения числа операций при численной реализации это выражение можно представить в виде

$$x_{k+1} = x_k + f(x) * g(x)/Wf(x_k)|_{x=x_k}, \tag{2}$$

где $h(x)$ – базисная вейвлет-функция; $g(x) = F^{-1}[((F(h(x))^2]$; $F, F^{(-1)}$ – операторы прямого и обратного преобразования Фурье; * – символ операции свертки. Предложенный подход позволил получить выигрыш по быстродействию в $(N+1)/2$ раз по сравнению с исходным алгоритмом (1). Результаты моделирования показали хорошую сходимость предложенного алгоритма.

[1] **Обоснование** метода поиска экстремума при наличии помех с использованием гиперболического вейвлет-преобразования / Антощук С. Г., Клих Ю. А., Николенко А. А., Бабилунга О. Ю. // Зб. наук. праць / Одеський ордена Леніна інститут Сухопутних військ. – Вип. 13 (ч. 1). – Одеса: ООЛІСВ, 2007. – С. 5–11.

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

А. В. Арсирий
Кафедра прикладной вычислительной математики и САПР
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
e-mail: a-arsiry@ukr.net

Пусть управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением с производной Хукухары вида

$$D_h X(t) = A(t)X(t) + u(t) + F(t), \quad X(0) = X_0, \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$; $X(\cdot) : [0, T] \to Conv(R^n)$ – многозначное отображение, определяющее состояние системы; $D_h X(t)$ – производная Хукухары; $A(t)$ – матрица $(n \times n)$; $F(\cdot) : [0, T] \to Conv(R^n)$ – многозначное отображение, определяющее отклонение системы; $u(\cdot) \in U \in Conv(R^n)$ – управляемое воздействие.

Поведение этой системы оценивается следующим критерием качества

$$I(u) = \Phi(X(T, u)) \tag{2}$$

где $\Phi(\cdot) : Conv(R^n) \to R^1$ или $\Phi(\cdot) : Conv(R^n) \to Conv(R^1)$.

Доказана компактность множества достижимости данной задачи управления, а также существование оптимального управления. Предложен приближенный (численный) метод решения задачи, то есть сформулирован алгоритм построения приближенного кусочно-постоянного управления, а также обоснована возможность замены исходного управления на построенное кусочно-постоянное (доказаны близость многозначных траекторий, соответствующих исходному и приближенному управлениям и близость соответствующих значений критериев качества в случаях в однозначном и многозначном случаях).

Обоснован метод усреднения в случаях периодической и непериодическох правой части, то есть доказаны теоремы, аналогичные теореме Боголюбова, показывающие близость многозначных траекторий исходной и усредненной систем, также доказаны теоремы о близости критериев качества исходной и усредненной систем для случаем однозначного и многозначного критериев.

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Ф. А. Асроров

Кафедра интегральных и дифференциальных уравнений

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка

e-mail: farhod@univ.kiev.ua

Рассматривается линейная неоднородная дифференциальная система с импульсным воздействием

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = a(t, \phi), \\ \frac{dx}{dt} = P(t, \phi)x + f(t, \phi), \ t \neq \tau_i, \\ \triangle x|_{t=\tau_i} = B_i(\phi)x + I_i(\phi) \end{cases} \tag{1}$$

где $a(t, \phi)$, $P(t, \phi)$ и $f(t, \phi)$ – непрерывные (кусочно-непрерывные с разрывами первого рода при $t = \tau_i$) при t и удовлетворяющие условию Липщица по ϕ соответственно матричная и векторная функции, 2π-периодические по ϕ_ν, $\nu = 1, ..., m$, ограниченные при всех $t \in R$, $\phi \in T_m$, T_m – m-мерный тор. $B_i(\phi)$ и $I_i(\phi)$ - постоянные матрицы и векторы, которые соответственно равномерно относительно $i \in Z$ ограничены, $det(E + B_i) \neq 0$. В силу компактности фазового пространства и сделанных предположений каждое решение $\phi_t(\tau, \phi)$, $\phi_\tau(\tau, \phi) = \phi$ при любых $\tau \in R$ и $\phi \in T_m$ существует и продолжимо на всю ось R. Наряду с системой (1) рассмотрим

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(t, \phi_t(\phi))x + f(t, \phi_t(\phi)), \ t \neq \tau_i, \\ \triangle x|_{t=\tau_i} = B_i(\phi_{\tau_i}(\phi))x + I_i(\phi_{\tau_i}(\phi)) \end{cases} \tag{2}$$

Запишем соответствующую (2) однородную систему уравнений и покажем что, если однородная система уравнений с импульсным воздействием является гиперболической, то для любой ограниченной на всей оси функции $f(t, \phi)$ и ограниченной последовательности $\{I_i(\phi_{\tau_i}(\phi))\}$ система уравнений (2) имеет единственное ограниченное при всех $t \in R$ и $\phi \in T_m$ решение.

[1] **Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.** Impulsive Differential Equations / Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. – Singapure: World Scientific, 1995. – 462 p.

ПРО ЗАДАЧІ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ

О. М. Башняков, І. В. Хітько
Кафедра Моделювання складних систем
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: bash@unicyb.kiev.ua

Розглянемо дискретну систему

$$x(k+1) = f_k(x(k)), k \in [0, N-1], \tag{1}$$

де f_k:$D \to D \subset R^n$ – n-вимірна функція, яка задовольняє локальній умові Ліпшиця. Нехай $G_0 \subset D$, $\Phi(k) \subset D$ – множина фазових обмежень, $0 \in int\Phi(k)$, $k \in [0, N]$ та $f_k(0) = 0$, $k \in [0, N-1]$.

Означення [1]. Нульовий розв'язок системи (1) називається $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$-стійким, якщо $x(k, x_0) \in \Phi(k), \forall x_0 \in G_0, k \in [0, N]$.

Максимальну за включенням множину практичної стійкості позначимо G_* [2]. Вважатимемо, що $\Phi(k)$, $k \in [0, N]$ є компактами.

Твердження 1. G_* є компактом.

Твердження 2. Якщо $x_0 \in \partial G_*$, то існує таке $\bar{k} \in [0, N]$, для якого $x(\bar{k}, x_0) \in \partial\Phi(\bar{k})$, при цьому $x(k, x_0) \in \Phi(k)$, $k \in [0, N]$.

Твердження 3. Якщо відображення f_k є відкритим, $k \in [0, N-1]$, виконується включення $x(k, x_0) \in \Phi(k)$, $k \in [0, N]$ і існує таке $\bar{k} \in [0, N]$ для якого $x(\bar{k}, x_0) \in \partial\Phi(\bar{k})$, то $x_0 \in \partial G_*$.

Розглянемо лінійну дискретну систему вигляду $x(k+1) = A_k x(k) + b_k$, де A_k – невироджена матриця розмірності $n \times n$, b_k – вектор розмірності n, $k \in [0, N-1]$.

Твердження 4. Для того, щоб $x_0 \in \partial G_*$, необхідно і достатньо, щоб $\max\limits_{k \in [0,N], \psi \in S} \frac{\langle \Theta(k,0)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(k),\psi) - \langle r(k), \psi \rangle} = 1$. Тут $\Theta(k, s) = \prod_{s \le i \le k-1} A_i$, $r(k) = \sum_{0 \le i \le k-1} \Theta(k, i+1) b_i$, $c(\Phi(k), \psi)$ – опорна функція множини $\Phi(k)$, $S = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$.

[1] **Бублик Б. Н.** Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б. Н. Бублик, Ф. Г. Гаращенко, Н. Ф. Кириченко. – Київ : Наукова думка, 1985. – 304 с.

[2] **Башняков О. М.** Практична стійкість, оцінки та оптимізація / О. М. Башняков, Ф. Г. Гаращенко, В. В. Пічкур. – Київ: Київський університет, 2008. – 383 с.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ДУ II-ОГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ В ОКРЕСТНОСТЯХ ОСОБЫХ ТОЧЕК НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

М. А. Белозерова
Кафедра дифференциальных уравнений
ОНУ имени И. И. Мечникова, ИМЭМ
e-mail: Marbel@ukr.net

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(\ i = 0, 1)$ — правильно меняющиеся функции порядка σ_i при $z \to Y_i$ $(z \in \ \Delta_{Y_i})$, $Y_i \in \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — односторонняя окрестность Y_i.

Говорят, что функция $\varphi : \Delta_Y \to]0, +\infty[$ правильно меняющаяся при $z \to Y$ $(Y \in \{0, \pm\infty\})$ порядка σ, если для произвольного $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{z \to Y \\ z \in \Delta_Y}} \frac{\varphi(\lambda z)}{\varphi(z)} = \lambda^\sigma.$$

Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решением, если

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

В случае, когда $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$ получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (1). Кроме того, установлены неявные асимптотические формулы при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных.

ПРО УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ ФРЕДГОЛЬМОВИХ І НЕТЕРОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ

Я. Й. Бігун, І. В. Березовська
Кафедра прикладної математики
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: yaroslav.bihun@gmail.com

Вагомий вклад в обгрунтування методу усереднення для звичайних диференціальних рівнянь з крайовими умовами належить В. О. Плотнікову та його учням. Для багаточастотних резонансних систем з багатоточковими й інтегральними умовами метод усереднення розвинутий у працях А. М. Самойленка і Р. І. Петришина. В даній роботі розглядається система диференціальних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta), \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta), \tag{1}$$

і з інтегральними крайовими умовами

$$\int_0^L f(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta) d\tau = d_1,$$

$$\int_0^L [A_1(\tau, x, x_\lambda)\varphi + A_2(\tau, x, x_\lambda)\varphi_\theta + g(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon)] d\tau = d_2, \tag{2}$$

де $\tau \in [0, L]$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, ε – малий додатний параметр, $x_\lambda(\tau) = x(\lambda\tau)$, $\varphi_\theta(\tau) = \varphi(\theta\tau)$, $\lambda, \theta \in (0, 1)$, A, B, f і g – 2π-періодичні по φ, φ_θ вектор-функції.

Усереднення в задачі (1), (2) здійснюється за швидкими змінними φ, φ_θ як в системі (1), так і в крайових умовах. Усереднена задача

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = A_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda), \frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda), \tag{3}$$

$$\int_0^L f_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda) d\tau = d_1,$$

$$\int_0^L [A_1(\tau,\overline{x},\overline{x}_\lambda)\overline{\varphi} + A_2(\tau,\overline{x},\overline{x}_\lambda)\overline{\varphi}_\theta + g_0(\tau,\overline{x},\overline{x}_\lambda)]d\tau = d_2,$$

не містить осцилюючих доданків і можна незалежно розв'язати крайову задачу для повільних змінних $\overline{x}$, а відтак знайти швидкі змінні $\overline{\varphi}$.

Припустимо, що A, B, f, і g достатньо гладкі вектор-функції своїх аргументів, а також існує єдиний розв'язок усередненої задачі і компонента $\overline{x} = x(\tau,\overline{x}_0)$ лежить в області D з деяким ρ-околом. Нехай також виконуються деякі умови незастрягання вихідної системи в околі резонансів

$$(k,\omega(\tau)) + \theta(l,\omega(\theta\tau)) = 0, k,l \in Z^m, \|k\| + \|l\| \neq 0.$$

Зокрема, ця умова виконується, якщо визначник Вронського порядку $2m$ за системою функцій $\{\omega(\tau),\omega(\theta\tau)\}$ відмінний від нуля для всіх $\tau \in [0,L]$.

У випадку, коли матричні функції $A_\nu = A_\nu(\tau,\overline{x},\overline{x}_\lambda)$, $\nu = 1,2$, доведено існування розв'язку задачі (1), (2) й отримано ефективну оцінку методу усереднення тільки для повільних змінних, порядок якої $O(\varepsilon^\alpha)$, $0 < \alpha \leq (2m)^{-1}$.

Якщо ж A_1 і A_2 залежать тільки від повільного часу τ, то доведено існування єдиного розв'язку задачі (1), (2) в малому околі розв'язку усередненої задачі і отримана оцінка порядку $O(\varepsilon^{1/2m})$ для відхилення розв'язків вихідної та усередненої задач.

Усі задачі, розглянуті вище, були фредгольмовими, тобто кількість крайових умов для повільних і швидких змінних збігалась з відповідною кількістю цих змінних. У роботі також обгрунтовано метод усереднення для системи (1) з лінійними крайовими умовами

$$P_0x(0) + P_1x(L) = d_1, Q_0\varphi(0) + Q_1\varphi(L) = d_2,$$

які є нетеровими. Тут P_ν – $p\times n$-матриці, Q_ν – $q\times m$-матриці, $\nu = 0,1$ і $p+q \neq n+m$. $\nu = 0,1$ і $p+q \neq n+m$. Питання обгрунтування методу усереднення для багаточастотних систем рівнянь вигляду (1) з нетеровими крайовими умовами у резонансному випадку раніше не розглядались.

УСРЕДНЕНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

И. А. Бойцова
Кафедра информационных технологий
Одесский государственный экологический университет
e-mail: boitsova.irina@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления системой

$$\begin{array}{ll} x_{i+1} = x_i + \varepsilon[X(i, x_i, y_i) + A(x_i) \cdot \varphi(i, u_i)], & x_0 = x^0, \\ y_{i+1} = Y(i, x_i, y_i), & y_0 = y^0. \end{array} \quad (1)$$

с терминальным критерием качества

$$J(u) = \Phi(x_N) \longrightarrow \min_{u \subset U}, \quad (2)$$

где $x_i \in D_x \subset R^n$ – медленные переменные, $y_i \in D_y \subset R^m$ – быстрые переменные, ε – малый параметр, $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$, $L = const$, $E(s)$ – целая часть числа s, $u_i \in U \subset$ $\subset comp(R^r)$ – вектор управления, $comp(R^r)$ – пространство компактных подмножеств в R^r с метрикой Хаусдорфа.

Для системы дискретных уравнений (1) записывается соответствующая вырожденная система с начальными условиями исходной задачи

$$\begin{array}{ll} x_{i+1} = x_i, & x_0 = x^0, \\ y_{i+1} = Y(i, x_i, y_i), & y_0 = y^0. \end{array} \quad (3)$$

Решение вырожденной системы представляется в виде

$$\begin{array}{l} x = const, \\ y_i = y(i, x, y^0, 0). \end{array} \quad (4)$$

Задаче оптимального управления (1), (2) ставится в соответствие возмущенная задача для медленных переменных с теми же управлениями

$$\widetilde{x}_{i+1} = \widetilde{x}_i + \varepsilon \cdot [X(i, \widetilde{x}_i, y(i, \widetilde{x}_i, y^0, 0)) + A(\widetilde{x}_i) \cdot \varphi(i, u_i)], \ \widetilde{x}_0 = x^0. \quad (5)$$

$$\widetilde{J}(u) = \Phi(\widetilde{x}_N) \longrightarrow \min_{u \subset U}, \quad (6)$$

Пусть равномерно относительно $q \geq 0, x \in D_x, y^0 \in D_y$ существует предел

$$\overline{X}(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=q}^{q+n-1} X(i, x, y(i, x, y^0, 0)) \qquad (7)$$

и множество допустимых управлений

$$V = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=q}^{q+n-1} \varphi(j, U), \qquad (8)$$

где сходимость понимается в смысле метрики Хаусдорфа.

Задаче (5), (6) ставится в соответствие усредненная задача оптимального управления

$$z_{i+1} = z_i + \varepsilon \cdot [\overline{X}(z_i) + A(z_i) \cdot \nu_i], \quad z_0 = x^0, \qquad (9)$$

$$\overline{J}(\nu) = \Phi(z_N) \longrightarrow \min_{\nu \subset V}, \qquad (10)$$

Формулируются условия, определяющие соотношение между оптимальными управления $u_i \in U$ и $\nu_i \in V$, соответствующими траекториями $x_i \in D_x$ и $z_i \in D_x$, и оптимальными значениями критериев качества $J(u)$ и $\overline{J}(\nu)$ исходной задачи (1), (2) и усредненной задачи (9), (10).

[1] **Плотников В. А.** Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова, А. Т. Яровой // Нелинейные колебания. – 2004. – Т. 7. – № 2. – С. 241–254.

ОБЪЕДИНЕНИЕ МОДЕЛИ ”ВЛАСТЬ-ОБЩЕСТВО” С МОДЕЛЬЮ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ПОКОЛЕНИЙ

О. В. Босомыкина
Кафедра прикладной математики и информатики
Российский Государственный Социальный Университет
e-mail: bosomykinaolga@mail.ru

Настоящая работа посвящена построению и исследованию математической модели, объединяющей модель ”власть-общество” и модель перекрывающихся поколений. Предложенная А. П. Михайловым модель ”власть-общество” описывает эволюцию распределения власти между инстанциями иерархии, включающую в себя как перераспределение власти (т. е. ее перетекание от одних инстанций к другим), так и изменение суммарного объема власти иерархии. В целях построения объединенной модели в модель Михайлова было введено предположение о том, что изменения распределения власти замедляются при высоком удельном потреблении населения и ускоряются при низком. Модель перекрывающихся поколений (Overlapping generations model, OLG) относится к классу моделей экономического роста. В целях построения объединенной модели в нее были введены следующие предположения.

а) В производственную функцию введена зависимость выпуска от общего объема власти, находящегося в распоряжении всех инстанций иерархии. При этом принимается, что выпуск продукта падает при слишком малом (близком к анархии) или слишком большом (чрезмерное административное давление) объеме власти иерархии.

б) Принимается, что наряду с промежуточным продуктом, инвестициями и потреблением, произведенный продукт расходуется на содержание иерархии, причем эти расходы пропорциональны общему количеству власти иерархии. Построенная модель описывает макроэкономические и происходящие в иерархии процессы в совокупности. Рассмотрен стационарный режим, в частности, исследована на максимум функция полезности в стационарном режиме.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ БИЛИНЕЙНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЧЕТКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е. А. Булатников
Кафедра оптимального управления и экономической кибернетики
Одесский Национальный Университет им. И. И. Мечникова
e-mail: bolshoy.chelovek@gmail.com

Рассмотрим следующее нечеткое дифференциальное включение, содержащее управление:

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u(t)x + c(t)u(t) + V, \;\; x(t_0) = x_0, \qquad (1)$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор, $t \in [t_0, t_1] \subset R$, $A(t), B(t)$ – матрицы $n \times n$, $c(t)$ – n-мерный вектор, $u(t)$ - скалярное управление, V – нечеткое множество с характеристической функцией $\mu(\cdot) : R^n \to \to [0, 1]$.

Теорема. Пусть включение (1) удовлетворяет следующим условиям: 1) матрицы $A(t), B(t)$ и вектор $c(t)$ – измеримы на $[t_0, t_1]$; 2) существуют константы $a, b, c > 0$ такие, что $\|A(t)\| \le a$, $\|B(t)\| \le b$, $\|c(t)\| \le c$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$; 3) функция $u(t)$ – измерима на каждом конечном временном интервале $[t_0, t_1]$; 4) существуют константы u_{min}, u_{max} такие, что $u(t) \in [u_{min}, u_{max}]$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$; 5) характеристическая функция $\mu(\cdot) : R^n \to [0, 1]$ удовлетворяет условиям: a) нормальная и полунепрерывна сверху по Бэру; b) $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall y \in \{y \in R^n | 0 < \mu(y) < 1\}$ существуют $y', y'' \in R^n$ такие, что $\|y - y'\| < \varepsilon$, $\|y - y''\| < \varepsilon$ и $\mu(y') < \mu(y) < \mu(y'')$; c) множество $cl\{y \in R^n | \mu(y) > 0\}$ – компактно.

Тогда для всех $t \in [t_0, t_1]$ и всех допустимых управлений $u(\cdot)$:

1) R-решением включения (1) будет нечеткое абсолютно непрерывное отображение, которое представимо в виде $X(t, u) = G(t, u) + +H(t, u)V$, и характеристическая функция нечеткого множества $X(t, u)$ имеет вид $\chi(t, u, x) = \mu(H^{-1}(t, u)(x - G(t, u)))$ при условии существования $H^{-1}(t, u)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$ и всех допустимых управлений $u(\cdot)$, где $G(t, u) \in R^n$ и $H(t, u) \in R^{n \times n}$ получены в явном виде;

2) нечеткое множество достижимости $Y(t_1)$ системы (1) является выпуклым и компактным.

ОПЕРАТОРИ ШРЕДІНҐЕРА З СИНГУЛЯРНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ

Ю. Д. Головатий
Кафедра диференціальних рівнянь
Львівський національний університет імені Івана Франка
e-mail: yu_holovaty@franko.lviv.ua

У доповіді йтиметься про моделі квантової механіки, в яких виникають оператори Шредінґера з потенціалами, зосередженими на дискретній множині точок $X \subset \mathbf{R}$,

$$\ell_0 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} + \sum_{x_k \in X} \alpha_k \delta_k(x - x_k), \quad \ell_1 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} + \sum_{x_k \in X} \alpha_k \delta'_k(x - x_k),$$

де δ – функція Дірака. Ці оператори описують т.з. δ- та δ'-взаємодію на множині X, де $\alpha_k \in \mathbf{R}$ – стала взаємодії в точці x_k [1]. На відміну від оператора ℓ_0, який має однозначне математичне трактування, проблема правильного трактування оператора ℓ_1 з 80-х років минулого століття була предметом наукових дискусій. Проблему розв'язали в [2], [3]. Наступне питання, яке виникає в точних моделях квантової механіки – це взаємодія $\delta(x)$ та $\delta'(x)$ потенціалів, зосереджених в одній точці. Ми вивчаємо асимптотичну поведінку гамільтоніанів

$$H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2}\Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{\beta}{\varepsilon^s}\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon^s}\right), \qquad x \in R,$$

потенціали яких збігаються до $\alpha\delta'(x) + \beta\delta(x)$ в сенсі узагальнених функцій при $\varepsilon \to 0$. Границя операторів H_ε в рівномірній резольвентній топології залежить від профілів апроксимації Ψ і Φ, а також параметра s.

[1] **Albeverio S.** Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators/ S. Albeverio, P. Kurasov. – Cambridge: Univ. Press, 2000.

[2] **Головатий Ю. Д.** Точні моделі для операторів Шредінґера з δ'-подібними потенціалами / Головатий Ю. Д., Манько С. С. //Укр. мат. вісник. – 2009. – Т.6, №2. – С.173-212.

[3] **Golovaty Yu. D.** On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ'-like potentials/ Yu. D. Golovaty and R. O. Hryniv // J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 155204 (14pp).

О ПРОДОЛЖАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ДУ I-ОГО ПОРЯДКА НА ПРОМЕЖУТОК НАПЕРЕД ЗАДАННОЙ ДЛИНЫ

Р. Г. Грабовская, Д. В. Павличенко
Кафедра дифференциальных уравнений
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
e-mail: dmitrii_pavlin89@mail.ru

Рассмотрим систему сингулярных дифференциальных уравнений вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_k(x)q_k(y_k)y_k' = f_k(x, y_1, ..., y_n), \\ \quad k = \overline{1, n}. \end{array} \right. \tag{1}$$

На (1) наложим следующие условия:

I. $g_k(+0) = 0$ либо $g_k(l) = 0$ либо $g_k(l)$ неопределено, т. е. l – ближайший от $x = 0$ ноль функции $g_k(x)$ либо точка, в которой $g_k(l)$ не определено. Причем $g_k(x) \in \mathbf{C}(0; l)$, $g_k(x) > 0$ на $(0, l)$, $k = \overline{1, n}$;

II. Для функции $g_k(x)$ существует функция $\varphi_k(x)$ такая, что $\varphi_k'(x) = \dfrac{1}{g_k(x)}$, $\varphi_k(+0) = 0$, $k = \overline{1, n}$;

III. Предполагается, что уравнение $q_k(y_k) = 0$ имеет счетное множество дискретных нулей A_k, $A_k \neq \emptyset$ и $q_k(y_k) \in \mathbf{C}^1(R \backslash A_k)$, $q_k > 0$, $k = \overline{1, n}$;

IV. $f_k(x, y_1, ..., y_n) \in \mathbf{C}^{01\ldots1}_{xy_1\ldots y_n}[(0; l) \times (R \backslash A_1) \times \ldots \times (R \backslash A_n)]$, $k = \overline{1, n}$;

Постановка задачи: найти достаточное условие, накладываемое на $f_k, k = \overline{1, n}$, при которых можно утверждать существование решений системы (1), продолжаемых на $(0; l - \delta]$, где $\delta > 0$, δ – сколь угодно малое число.

Решение поставленной задачи. Обозначим через a_{ki_k} элемент множества A_k с номером i_k. Введем в рассмотрение область

$$G = \left[\begin{array}{c} 0 < x \leq l - \delta \\ c^{\pm}_{ki_k}\left(1 - \lambda_{ki_k}\varphi_k(x)\right) \leq y_k \leq c^{\pm}_{ki_k}\left(1 + \lambda_{ki_k}\varphi_k(x)\right), k = \overline{1, n} \end{array} \right],$$

где c_{ki_k}– параметры, $c^{+}_{ki_k} \longrightarrow a_{ki_k} + 0$, $c^{-}_{ki_k} \longrightarrow a_{ki_k} - 0$, $\lambda_{ki_k} = \overline{O}(|a_{ki_k} - c_{ki_k}|)$. Причем $c^{+}_{ki_k}\left(1 - \lambda_{ki_k}\varphi_k(x)\right) > a_{ki_k}$, $c^{-}_{ki_k}\left(1 + \lambda_{ki_k}\varphi_k(x)\right) <$

$< a_{ki_k}$, $0 < \lambda_{ki_k} = const$. Тогда, если $(x, y_1, ..., y_n) \subset G$, то предполагается, что

V.

$$\lim_{c^{\pm}_{ki_k} \to a_{ki_k} \pm 0} \frac{f_k(x, y_1, ..., y_n)}{q_k(c^{\pm}_{ki_k}(1 \pm \lambda_{ki_k}\varphi_k(x)))} = 0,$$

равномерно относительно $x \in (0, l-\delta]$, тогда ∂G состоит из точек строго выхода из G при убывании x, и потому качественными методами можно отсюда получить, что внутри G на $(0, l-\delta]$ лежит n-параметрическое семейство интегральных кривых $\{y_k^0(x)\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

$$c^{\pm}_{ki_k}\left(1 - \lambda_{ki_k}\varphi_k(x)\right) < y_k^0 < c^{\pm}_{ki_k}\left(1 + \lambda_{ki_k}\varphi_k(x)\right), \text{если } a_{ki_k} > 0$$

и

$$\lim_{x \longrightarrow +0} y_k^0(x) = c_{ki_k},\ k = \overline{1, n}.$$

Итак, при условиях I-V система (1) на $(0, l-\delta]$ имеет n-параметрическое семейство решений, имеющих при $x \longrightarrow +0$ определенный предел, т. е. эти решения продолжаемые на $(0, l-\delta]$.

Пример:

$$\begin{cases} x\ln^2\left(\frac{1}{x}\right) y_1^4 y_1' = \sin^8(y_1)(2 + \sin(y_2)) + x^3 e^{-\frac{1}{y_1^2}}; \\ \sqrt{1-(x-1)^2}\sin^2 y_2 {y_2}' = 4x^3 y_1 e^{-\frac{1}{\sin^4 y_2}}\cos^5 y_2, \end{cases}$$

где $g_1(x) = x\ln^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$, тогда $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$;

$g_2(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$, тогда $\varphi_2(x) = \arcsin(x-1) + \dfrac{\pi}{2}$;

$q_1(y_1) = y_1^4$, $A_1 = \{0\}$; $q_2 = \sin^2 y_2$, $A_2 = \{\pi k, k \in Z\}$.

УПРАВЛЕНИЕ В МАКРОМОДЕЛЯХ "ВЛАСТЬ – ОБЩЕСТВО – ЭКОНОМИКА" [4]

М.Г. Дмитриев
Кафедра прикладной математики и информатики
Российский Государственный Социальный Университет
e-mail: mdmitriev@mail.ru

В докладе приводится обзор последних результатов по моделям "власть-общество-экономика" для базовой и коррумпированной иерархий. На макроуровне изучается объединение моделей Солоу и Михайлова. Для стационарного случая моделей определяется объем власти в иерархии, максимизирующий среднедушевое потребление. Для протяженных иерархий выясняется возможность реализации оптимального стационарного объема власти в динамической иерархии с помощью систем поддержки гражданским обществом той или иной модели власти в рамках решений нестационарных сингулярно возмущенных краевых задач с быстрыми внутренними переходами – т.н. контрастными структурами. Для агрегированной нестационарной модели, где переменными состояния являются удельная фондовооруженность и объем власти в иерархии, рассматриваются различные задачи оптимального управления, где в качестве управлений могут выступать норма накопления, коэффициент усиления реакции гражданского общества и изменчивость среды. Для ряда постановок анализируются приближенно оптимальные законы управления.

[1] Стационарные задачи оптимального взаимодействия в системе "власть-общество". Ученые записки РГСУ. № 6 / Васильева А.Б., Дмитриев М.Г., Пилюгин В.С. – М. : Изд-во РГСУ, 2008. – с. 108–118.

[2] Оптимальный объем властных полномочий в социально-экономической иерархии по критерию удельного потребления. Информационные технологии и вычислительные системы. № 4 / Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П. – М. : Изд-во ЛКИ, 2007. – с. 4–11.

[3] Развитие модели "власть – общество – экономика". Математическое моделирование социальных процессов. Вып. 10 / Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П. – М. : КДУ, 2009. – с. 17–29.

[4] Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 08=06-00302а

[4] Учет действия коррупции в стационарной модели “власть–общество–экономика”. Социальная политика и социология. № 5. Часть 1 / Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П. – М. : Изд-во РГСУ, 2009. – с. 378–387.

[5] Линейный синтез управления ресурсами в нестационарной модели “власть–общество–экономика”. Ученые записки РГСУ. № 11 / Павлов А.А. – М. : Изд-во РГСУ, 2009. – с. 210–219.

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Т. В. Добродзій, В. В. Могильова
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
НТУУ "Київський політехнічний інститут"
e-mail: notava@ukr.net

Розглядається задача оптимального керування системою

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x, u), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

з критерієм якості $J(u) = \int\limits_0^\infty L(t, x, u)dt \to \inf$, де $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$, $x \in D \subset R^n$, $u \in U \subset R^m$ X - n-мірна вектор-функція, періодична по t з періодом Θ, а для функції $L(t, x, u)$ виконується умова: $|L(t, x, u) - L(t, y, u)| \leq \gamma(t)|x - y|$, де $\int\limits_0^\infty \gamma(t)dt = C_\gamma < \infty$.

Поставимо у відповідність (1) при $t \geq 0$ усереднену систему

$$\dot{y} = \varepsilon X_0(y, \bar{u}), \quad y(0) = x_0, \tag{2}$$

з критерієм якості $\bar{J}(\bar{u}) = \int\limits_0^\infty L(t, y, \bar{u})dt$, де $X_0(x, u) = \frac{1}{\Theta}\int\limits_0^\Theta X(t, x, u)dt$, $t \geq 0$. Вважаємо, що для усередненої системи виконуються умови:

(A1) Для довільної сталої $u_0 \in U$ розв'язок $\bar{y}(\tau) = \bar{y}(\tau, u_0)$ усередненої системи $\frac{d\bar{y}}{d\tau} = X_0(\bar{y}, u_0), \bar{y}(0) = x_0$, визначений при всіх $\tau \geq 0$ і лежить в області D з деяким ρ - околом, де ρ не залежить від u_0.

(A2) розв'язок $\bar{y}(\tau)$ є експоненціально стійким.

Теорема. Нехай в області $Q = \{t \geq 0, x \in D \subset R^n, u \in U \subset R^m\}$ виконуються умови:

1) $X(t, x, u)$ — вимірна по t, обмежена та задовольняє умову Ліпшиця по x та u;

2) виконуються умови $(A1)$ та $(A2)$;

3) існує оптимальне керування u^* усередненої задачі (2).

Тоді існує таке $\widetilde{\varepsilon}_0 = \min\{\frac{\delta}{6C_1 + C_2}, \frac{\rho}{2C_1(1+2N)}, \frac{\rho}{8(2C_1+C_2)}\}$, що для довільного $0 < \varepsilon < \widetilde{\varepsilon}_0$, $J^* > -\infty$ і виконується нерівність $|J(u^*) - J^*| \leq \varepsilon C$, де $C = (1 + 2C_\gamma)(2C_1(1 + 4N) + C_2(1 + N))$, $C_1 = MC_\varphi(2N)^{\frac{M}{\alpha}}$, $C_2 = (2N)^{\frac{M}{\alpha}}K\Theta(2 + \frac{M \ln 2N}{\alpha})$.

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Г. А. Ефимова, А. А. Томкеев
Кафедра ОУЭК
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
e-mail: efimova.g.a@onu.edu.ua, atomkeev@gmail.com

Рассматривается общая задача теории расписаний, для которой построена метаматическая модель. Она содержит линейную целевую функцию и квадратичные ограничения с булевыми и вещественными переменными.

Задачи ТР являются NP-полными и чаще всего для их решения используются приближённые и эвристические методы [1, 2]. Для решения полученной задачи проводится декомпозиция на две подзадачи:

1. задачу выбора управляющих переменных;

2. задачу ЛП с булевыми и вещественными переменными.

Частично целочисленные ЗЛП решаются стандартными методами. Для решения первой подзадачи предложен эвристический алгоритм и его модификации. Вводятся понятия степени напряжённости, приоритета и мощности операций, а так же способы их вычисления. Модификации предлагаемого алгоритма связаны с упорядочиванием операций по предложенным характеристикам. Частным случаем такого метода является алгоритм Ху [3], который даёт оптимальное решение для intree-дерева.

Численные эксперименты показали эффективность и высокую скорость работы данного метода. Он может быть использован при разработке методов решения более сложных прикладных задач теории расписаний.

[1] **Конвей Р. В.** Теория Расписаний / Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В. : Наука, 1975. – 360 с.

[2] **Brucker P.** Scheduling algorithms / P. Brucker, 5ft ed., Heidelberg: Springer, 2007. – 371 p.

[3] **Pinedo M.** Scheduling: Theory, Algorithms and Systems / M. Pinedo, 2nd ed., New Jersey:Prentice Hall, 2002. – 671 p.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МНОГОШАГОВЫХ ИГР И ПРИЛОЖЕНИЯ

В. И. Жуковский
Кафедра математики и механики
РосЗИТЛП (Россия, Москва)
e-mail: rzitlpoz@rambler.ru

1. Математическая формализация с учетом фазовых ограничений (игроки, стратегии, ситуации, многошаговая управляемая система, партия игры, функции выигрыша, метод динамического программирования).

2. Возможная схема классификации многошаговых игр (варианты игры: бескоалиционный, кооперативный, коалиционный, иерархический).

3. Учет неопределенностей (аналоги седловой точки – векторная седловая точка; аналоги максимина – векторный максимин).

4. Риск по Сэвиджу (векторная гарантия, линейно-квадратичный вариант).

Приложения (равновесия по Нэшу, алгоритм):

a) задача Курно в многошаговой постановке (математическая модель, явный вид равновесного решения);

b) сокращение расходов на вооружение (математическая модель, построение равновесной ситуации и равновесных выигрышей);

c) борьба с эпидемией (математическая модель, построение явного вида ситуации равновесия);

d) задача выравнивания цен по уровню актива (построение ситуации равновесия по Нэшу).

[1] **Zhukovskiy V. I.** The Vector-Valued Maximin / Zhukovskiy V. I., Salukvadze M. E. – New York inc.: Academic Press, 1994. – 404 p.

[2] **Жуковский В. И.** Кооперативные игры при неопределенности и их приложения / Жуковский В. И. 2-е изд. – М.: УРСС, 2009. – 272 с.

[3] **Zhukovskiy V. I.** Lyapunov Functions in Differential Games / Zhukovskiy V. I. – London and New York: Teylor and Francis, 2003. – 282 p.

УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМ СТАНДАРТНОГО ВИДА В СЛУЧАЕ СКОЛЬЗЯЩЕГО РЕЖИМА

Т. С. Зверкова
кафедра вычислительной математики
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
e-mail: zverkova_t@rambler.ru

Рассматривается система стандартного вида

$$x' = \varepsilon f(t,x) = \varepsilon \begin{cases} f_1(t,x), & \Phi(x) < 0 \\ f_2(t,x), & \Phi(x) > 0, \quad x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $x \in R^n$, $f(t,x)$ – кусочно-непрерывная вектор-функция в области G $(n+1)$-мерного пространства (t,x), функции $f_1(t,x)$ и $f_2(t,x)$ равномерно непрерывны и 2π-периодичны. Здесь $\Phi(x) = 0$ – уравнение гладкой поверхности разрыва S. Предполагается, что проекции векторов $f_1(t,x)$ и $f_2(t,x)$на нормаль к поверхности имеют разные знаки и направлены навстречу друг другу, тогда решение, попав на поверхность , будет оставаться на ней, т.е возникает скользящий режим. Под решением уравнения (1) понимается решение следующего уравнения

$$x' = \varepsilon F(t,x) = \varepsilon \begin{cases} f_1(t,x), & \Phi(x) < 0 \\ f_0(t,x), & \Phi(x) = 0 \\ f_2(t,x), & \Phi(x) > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$f_0(t,x) = \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2, \quad \alpha = \frac{(grad\Phi(x), f_1)}{(grad\Phi(x), (f_1 - f_2))}$$

Усредненная система для (2) имеет вид

$$\xi' = \varepsilon \overline{F}(\xi), \quad \xi(0) = x_0, \tag{3}$$

где $\overline{F}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(t,x)dt$. Доказаны теоремы о близости решений систем (2) и (3) на сегменте порядка $1/\varepsilon$.

ФУНКЦИИ РИСКА В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ МНОГОШАГОВОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ИГРЕ

В. В. Золотарёв
Кафедра информатики
РосЗИТЛП (Россия, Москва)
e-mail: rzitlpoz@rambler.ru

Рассматривается многошаговая позиционная игра двух лиц без фазовых ограничений, где управляемая система описывается линейным (относительно фазового вектора, неопределенности и управляющего воздействия) уравнением, а функция выигрыша игрока квадратична по фазовым координатам и управляющему воздействию, которое, в свою очередь, ограничено линейными (по фазовому вектору и неопределенностям) функциями.

Поставлены достаточные условия существования функции риска (по Сэвиджу). Эти условия формулируются на основе подходящего варианта метода динамического программирования с использованием введенных академиком Н. Н. Красовским контрстратегий.

Предлагается алгоритм построения функции риска, а также ее явный вид при специальных ограничениях на параметры, фигурирующие в функции выигрыша.

[1] **Вайсборд Э. М., Жуковский В. И.** Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. – М.: Советское радио, 1980. – 320 с.

[2] **Жуковский В. И., Молоствов В. С.** Многокритериальная оптимизация систем в условиях неполной информации. – М.: МНИИПУ, 1990. – 112с.

[3] **Жуковский В. И., Салуквадзе М. Е.** Многокритериальные задачи управления в условиях неопределенности. – Тбилиси: Мецниереба, 1991. – 128с.

[4] **Жуковский В. И., Чикрий А. А.** Линейно-квадратичные дифференциальные игры. – Киев: Наукова Думка, 1994. – 320 с.

[5] **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. – М.: Наука, 1985. – 520 с.

[6] **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантий в задачах управления. – М.: Наука, 1981. – 287 с.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СИНГУЛЯРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

А. И. Калинин
Кафедра методов оптимального управления
Белорусский государственный университет, Минск
e-mail: kalininai@bsu.by

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных, принято называть сингулярно возмущенными. Задачи оптимизации таких систем в различных постановках исследовались многими авторами. Интерес к ним вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные задачи оптимального управления распадаются на задачи меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими.

Доклад посвящен построению асимптотических приближений к решениям задач оптимизации сингулярно возмущенных систем с многомерными управляющими воздействиями, значения которых ограничены по евклидовой норме. Суть предлагаемых методов состоит в построении асимптотики множителей Лагранжа к длительности процесса (в том случае, когда она не задана), которые являются удобными конечномерными элементами для описания решений рассмотренных возмущенных задач. Во-первых, по ним легко восстанавливаются оптимальные управления, во-вторых, что очень существенно с точки зрения теории возмущений, они, как правило, гладким образом зависят от малого параметра. Для построения асимптотических приближений заданного порядка к оптимальному управлению достаточно заменить неизвестные множители Лагранжа и длительность процесса их асимптотическими разложениями соответствующего порядка. Предлагаемые методы удобны для численной реализации, поскольку при их применении дело сводится к разложению конечномерных элементов.

ГЛОБАЛЬНІ АТРАКТОРИ НЕАВТОНОМНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

О. В. Капустян, Т. Б. Шкляр
Кафедра інтегральних і диференціальних рівнянь
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: alexkap@univ.kiev.ua, t.shkliar@gmail.com

В роботі досліджується якісна поведінка розв'язків неавтономних еволюційних включень методами теорії глобальних атракторів неавтономних многозначних динамічних систем. В роботі [1] для автономних еволюційних включень субдиференціального типу з неліпшицевою правою частиною показано, що за умов лише глобальної розв'язності та дисипативності сильні розв'язки породжують многозначний напівпотік, для якого в фазовому просторі існує компактний глобальний атрактор. Метою данної роботи є узагальнити цей результат на включення, права частина яких явно залежить від часової змінної. Основним моментом дослідження є адекватний вибір топології на множині трансляцій (зсувів) коефіцієнтів правої частини з тим, щоб не виходячи за межі умов глобальної розв'язності, довести для відповідної сім'ї многозначних процесів набір топологічних властивостей (асимптотичну компактність, напівнеперервність зверху, зв'язнозначність), які б забезпечували існування в фазовому просторі глобального атрактору. З цієї точки зору розглянуто включення субдиференціального типу з неавтономним многозначним збуренням [2] та параболічне включення з неавтономною головною частиною. Досліджено також питання про існування та якісну поведінку невід'ємних розв'язків еволюційних включень та про залежність глобального атрактору від малого параметра.

[1] **Global** attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. / O. V. Kapustyan, V. S. Mel'nik, J. Valero, V. V. Yasinsky. – К. : Наукова Думка, 2008. – 215 с.

[2] **Капустян О. В.** Якісна поведінка розв'язків неавтономного параболічного включення з трансляційно-компактною правою частиною / О. В. Капустян, Т. Б. Шкляр // Вісник Київського університету. Серія: математика, механіка. – 2009. – № 22. – С. 17–20.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.А. Касьянова
Кафедра информационных систем и технологий
Одесский государственный аграрный университет
e-mail:emden@farlep.net

Рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$y'' = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(y), \tag{1}$$

где $\alpha_k \in \{-1; 1\}$ $(k = \overline{1,m})$, $p_k : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,m})$- непрерывно дифференцируемые функции, $r_k : [a,\omega[\longrightarrow \mathbf{R}$ $(k = \overline{1,m})$- непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_k(t) = 0, \quad k = \overline{1,m},$$

$-\infty < a < \omega \le +\infty$, а φ_k $:]0,y_0] \longrightarrow]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,m};\ 0 < y_0 < +\infty)$- дважды непрерывно дифференцируемые функции. Решение y уровнения (1) называется $\Pi_\omega(0,\mu_0)$- решением, где $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$y(t) \in]0,y_0] \quad \text{при} \quad t \in [t_0,\omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y(t) = 0;$$

$$y'(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0,\omega[, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & -\infty; \end{cases}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \mu_0, \quad \text{причем} \ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2} = 1, \ \text{если} \quad \mu_0 = \pm\infty.$$

При некоторых ограничениях на функцию φ установлены необходимые и достаточные условия существования $\Pi_\omega(0,\mu_0)$-решений дифференциального уравнения (1) и получены ассимптотические формулы при $t \uparrow \omega$ для всех возможных типов таких решений.

1. Касьянова В.А. . Асимптотическое поведение исчезающих решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка. //Научный вестник черновецкого университета. - 2005. - №239. - С.66-81

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ И С МАКСИМУМОМ

О.Д. Кичмаренко, А.И. Юрченко
Кафедра оптимального управления и экономической кибернетики
Одесский Национальный Университет им. И.И.Мечникова
e-mail: olga.kichmarenko@gmail.com, annewka13@gmail.com

Рассмотрим следующее управляемое линейное уравнение с производной Хукухары и с максимумом в стандартной форме:

$$D_H X(t) = \varepsilon \left[A(t) X(t) + A_1(t) \max_{\tau \in [g(t), \gamma(t)]} |X(\tau)| + F(t) + B(t) u(t) \right], X(0) = X_0, \quad (1)$$

где ε - малый параметр, $X : \mathrm{R}^1 \to conv(\mathrm{R}^n)$, $A(t)$, $A_1(t)$ – $2\pi-$периодические матрицы $n \times n$, $F : \mathrm{R}^1 \to conv(\mathrm{R}^n)$, $t \in I = [0, L\varepsilon^{-1}]$, $g(t)$ и $\gamma(t)$ известные функции, $0 \le g(t) \le \gamma(t) \le t$, $B(t)$ - $2\pi-$периодическая матрица $n \times r$, $u(t) \in U \in conv(\mathrm{R}^r)$.

Уравнению (1) поставим в соответствие следующее усредненное уравнение:

$$D_H Y(t) = \varepsilon \left[\overline{A}\, Y(t) + \overline{A_1} \max_{\tau \in [g(t), \gamma(t)]} |Y(\tau)| + \overline{F} + v \right], Y(0) = X_0, \quad (2)$$

где $Y : \mathrm{R}^1 \to conv(\mathrm{R}^n)$,

$$\overline{F} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(s) ds, \quad \overline{A} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(s) ds, \quad \overline{A_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_1(s) ds,$$

где v - новое управление, $v \in V = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(s) u(s) ds, u(s) \in U \right\}$. Для уравнений (1) и (2) доказана теорема о близости решений.

[1] Kichmarenko O. D. Averaging of differential equations with Hukuhara derivativewith maxima. / O. D. Kichmarenko // International journal of pure and applied mathematics. – 2009. – V. 57, № 3. – p. 447-457.

ЭВОЛЮЦИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ПЬЕЗОМАНИПУЛЯТОРА

Ю. А. Клих, Д. Э. Контрерас, М. В. Ядрова
Кафера Информационных Систем
Одесский Национальный Политехнический Университет
e-mail: jury.klikh.richy@gmail.ru

Предложена математическая модель системи управления пьезоманипулятором. Модель описывается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением, которое учитывает электромеханический гистерезис. Минимизация построенного функционала обеспечивает условия комутации оптических каналов связи. Исследование сведено к решению двухточечной краевой задачи принципа максимума, к которой применяется метод усреднения.

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{h^3}{6}\widetilde{\Gamma}_1\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}=$$
$$=\frac{h^5}{40}\widetilde{\Gamma}_3\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right]\right\}=Usin(vt) \quad (1)$$

$$w(0,t)=\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)=\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L,t)=0 \quad (2)$$

Согласно методу Бубнова-Галеркина [2], его приближенное решение имеет вид

$$w(y,t)=y(t)\sin(x),\ \ 0\le x\le d \quad (3)$$

Здесь $y(t)$ – искомая функция времени, удовлетворяющая уравнению. Уравнение деформации такой пластинки имеет вид [2]:

$$\begin{gathered}\ddot{y}+w^2y=\varepsilon w^2\int_0^t R_1(t-s)y(s)ds-\\ -\varepsilon\gamma y^3-\varepsilon\gamma\int_0^t R_3(t-s)y^3(s)ds+\varepsilon qu\sin(vt),\end{gathered} \quad (4)$$

Задача сводится к следующей:

$$\begin{gathered}J[u]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a^2(\tau-\tau_i)1(\tau-\tau_i)+\\ \varepsilon\int_0^T\sum_{i=1}^n\frac{[L-y(\tau-\tau_i)]^2y^2(\tau-\tau_i)}{1+\dot{y}^2(\tau-\tau_i)}1(\tau-\tau_i)d\tau-\min,\end{gathered} \quad (5)$$

Для исследования эволюции оптимального процесса асимптотическими методами преобразуем краевую задачу для исследования ее решения методом усреднения вдоль решения соответствующей порождающей краевой задачи ([2],[3]).

Биморфная пластинка выполнена из пьезокерамического материала ЦТС-19 (цирконат-титанат свинца). Проведен численный эксперемент.

Обоснованием асимптотической оптимальности получаемого таким образом решения поставленной задачи служит выполнение условий теоремы о непрерывной зависимости решения краевой задачи принципа максимума.

[1] **Клих Ю. А.** Усреднение вдоль решения порождающей краевой задачи в задачах оптимального управления / Клих Ю. А. // III респ. конф. "Функционал.-дифференц. уравнения и их приложения": Тез. докл. – Пермь: Ред.-издат. отдел Перм. ун-та, 1988. – 172 с.

[2] **Клих Ю. А.** Методы усреднения в краевых задачах принципа максимума / Клих Ю. А. // Тр. VIII междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Прага, 1978. – Т. 2. – С. 913–919.

[3] **Самойленко А. М.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / Самойленко А. М., Перестюк Н. А. – К: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.

[4] **Митропольский Ю. А.** Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений / Митропольский Ю. А., Филатов А. Н. – К.: Наук. думка, 1992. – С. 30–48.

МЕТОДЫ УСРЕДНЕНИЯ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ РАСЧЕТА ЭВОЛЮЦИИ ЗАПОМИНАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА НА ФЕРРИТОВОМ СЕРДЕЧНИКЕ

Ю. А. Клих, А. Н. Терновая, В. В. Новиков,
А. А. Николенко
Кафера Информационных Систем
Одесский Национальный Политехнический Университет
e-mail: jury.klikh.richy@gmail.ru

В данной работе представлены новые методы записи, хранения и считывания информации. Ставится задача математического расчета внешнего запоминающего устройства с высокими характеристиками быстродействия, емкости и надежности хранения информации. Реализовать указанную задачу удается в рамках решения двухточечной краевой задачи принципа максимума с помощью метода усреднения [1-5]. Суть подхода заключается в следующем: усреднение происходит вдоль решения порождающей задачи. В качестве модели запоминающего устройства выбран ферритовый сердечник. С помощью вэйвлет анализа получена информация о движении центра петли гистерезиса ферритового образца [6-8].

В силу доказанных теорем о непрерывной зависимости краевой задачи принципа максимума от малого параметра [2,3] становится возможным описать асимптотически оптимальное управление и эволюцию запоминающего устройства.

Для иллюстрации преимуществ представленного метода записи и считывания информации приводится решение конкретного примера.

[1] **Морс Ф. М.** Методы теоретической физики / Морс Ф. М. – М.: ИЛ, 1958. – Т. 1. – 931 с.

[2] **Клих Ю. А.** Усреднение вдоль решения порождающей краевой задачи в задачах оптимального управления / Клих Ю. А. // III респ. конф. "Функционал.-дифференц. уравнения и их приложения": Тез. докл. – Пермь: Ред.-издат. отдел Перм. ун-та, 1988. – 172 С.

[3] **Клих Ю. А.** Методы усреднения в краевых задачах принципа максимума / Клих Ю. А. // Тр. VIII междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Прага, 1978. – Т. 2. – С. 913–919.

[4] **Самойленко А. М.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / Самойленко А. М., Перестюк Н. А. – К: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.

[5] **Митропольский Ю. А.** Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений / Митропольский Ю. А., Филатов А. Н. – К.: Наук. думка, 1992. – С. 30–48.

[6] **Ситидзе Ю.** Ферриты / Ситидзе Ю., Сато Х. – М.: Мир, 1964. – 407 с.

[7] **Кифер И. И.** Характеристики ферритовых сердечников / Кифер И. И. – М.: Энергия, 1967. – 167 с.

[8] **Мала С.** Вэйвлеты в обработке сигналов / Мала С. – М.: Мир, 2005. – 671 с.

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ДИССИПАТИВНЫХ МОМЕНТОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ МЕДЛЕННОГО ВРЕМЕНИ

Т. А. Козаченко
Кафедра теоретической механики
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
e-mail: kushpil.ru@rambler.ru

Рассматривается возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. Ставится задача исследовать поведение решения системы при значениях малого параметра ε, отличных от нуля, на достаточно большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Проведено усреднение уравнений движения по быстрой переменной – углу нутации при произвольных начальных условиях для возмущений. Исследование возмущенного движения гироскопа Лагранжа проводится для медленных переменных, позволяющих определять полную энергию тела, проекцию кинетического момента на вертикаль и угловую скорость вращения относительно оси симметрии.

Получено численно решение усреднённой системы дифференциальных уравнений в случае медленно изменяющейся вязкости внешней среды.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОГО ДУ II-ОГО ПОРЯДКА

А. А. Козьма
Кафедра математических методов анализа экономики
Одесский государственный экономический университет
e-mail: sanjakos@ukr.net

Рассматрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)[1 + r_i(t)]\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'), \qquad (1)$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, ..., m)$, $p_i : [a,\omega) \to (0, +\infty)$ $(i = 1, ..., m$; $-\infty < a < \omega \leq +\infty$[1]$)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $r_i : [a, \omega) \to R$ $(i = 1, ..., m)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\lim\limits_{t\uparrow\omega} r_i(t) = 0$ $(i = 1, ..., m)$, $\varphi_{ik} : \Delta_k \to (0, +\infty)$ ($k = 0, 1$; $i = 1, ..., m$)— дважды непрерывно дифференцируемые функции, в некотором смысле близкие к степенным.

Исследуется вопрос о существовании у уравнения (1) решения y, определенного на промежутке $[t_0, \omega) \subset [a, \omega)$ и удовлетворяющего условиям

$$y^{(k)} : [t_0, \omega) \to \Delta_k, \lim_{t\to+\infty} y^{(k)}(t) = Y_k \ (k = 0, 1), \lim_{t\to+\infty} \frac{ty''(t)}{y'(t)} = \mu_0$$

где Y_k $(k = 0, 1)$ равны либо нулю, либо бесконечности, Δ_k-односторонняя окрестность Y_k и $-\infty < \mu_0 < +\infty$.

[1] **Козьма А. А.** Асимптотические представления одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Козьма А. А. // Нелінійні коливання. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 490–501.

[2] **Козьма О. О.** Асимптотичне поводження розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку / Козьма О. О. // Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 374. – С. 55–65.

[1] При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.
[2] При $Y_k = +\infty (Y_k = -\infty)$ считаем, что $y_k^0 > 0$ $(y_k^0 < 0)$.

О СТРУКТУРЕ НЕКОТОРЫХ ДИВИЗОРОВ И УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. Н. Колмакова

Кафедра высшей математики и моделирования систем
Одесский национальный политехнический университет
e-mail: lyukol@mail.ru

Рассматривается система характеристических уравнений

$$A(t)\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \tag{1}$$

на разомкнутом контуре. $A(t)$ и $B(t)$ квадратные матрицы специального вида, позволяющие сводить такого рода системы к матричным задачам Римана с матрицами подстановочного типа третьего порядка.

Для матрицы $G(t) = [A(t) + B(t)]^{-1} \cdot [A(t) - B(t)]$ построена H-факторизация с использованием аппарата алгебраических функций на трехлистной римановой поверхности $\Re$ рода ρ.

Частные индексы матрицы $G(t)$ в общем случае неустойчивы. Для их вычисления и оценки оказалось необходимым систематизировать и исследовать классы дивизоров, возникающих в процессе решения проблемы обращения Якоби [1].

Пусть $\{\xi\}$ – множество дивизоров порядка α на поверхности $\Re$. Для каждого дивизора $\xi \in \{\xi\}$ можно построить нормальный базис функций $\{\Psi\}$ со своей системой показателей, удовлетворяющих условию: $\sum_{i=1}^{3} deg\psi_i = \alpha + V$. V – индекс разветвления поверхности $\Re$, т. е. задается отображение $\Psi : \xi \longrightarrow \{deg\psi_i\}$[2].

Дивизоры $\xi, 0 \in \{\xi\}$ считаем эквивалентными, если $\Psi(0) = \Psi(\xi)$.

В работе устанавливается критерий принадлежности дивизоров из рассматриваемого множества одному и тому же классу эквивалентности, исследуется само отображение $\Psi(\xi)$. По сути эти классы являются инвариантами частных индексов и тем самым выясняется природа их устойчивости.

На основании этого результата получено решение задачи об устойчивости частных индексов исходной системы (1).

[1] **Круглов В. Е.** Об алгебраических функциях, кратных заданному дивизору / Круглов В. Е. Докл. АН СССР. – 1991. – 321, № 1. – С. 11–13.

[2] **Колмакова Л. Н.** О показателях элементов нормального базиса идеала алгебраических функций на трехлистной римановой поверхности / Колмакова Л. Н. // Укр. мат. Журнал. – 1995. – Т. 47, № 8. – С. 1033–1041.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ МОНОТОННОГО ТИПА НЕЛИНЕЙНЫХ ОДУ I-го ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Л. Л. Кольцова, А. В. Костин
Кафедра высшей математики
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
e-mail: koltsova.liliya@gmail.com

Рассматривается вещественное ОДУ I-го порядка:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(t, y(t), y'(t)) = 0, \tag{1}$$

$f_k = p_k(t)(y(t))^{\alpha_k}(y'(t))^{\beta_k}$ $(k = \overline{1,n})$, $(t, y, y') \in D = \Delta(a) \times \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$, $\Delta(a) = [a; +\infty[$, $a \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_i = \mathbf{R} \vee \mathbf{R}_+$ $(i = 1, 2)$; $0 \neq p_k(t) \in \mathrm{C}_{\Delta(a)}$ $(k = \overline{1,n})$; $\alpha_k, \beta_k \geq 0$ $(k = \overline{1,n})$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \neq 0$.

Исследуется вопрос о существовании и об асимптотическом поведении при $t \to +\infty$ неограниченно продолжаемых вправо решений (п-ре-шений) $y(t)$ ОДУ (1) таких, что: 1) $0 \neq y(t) \in \mathrm{C}^1_{\Delta(t_0)}$, $t_0 \gg a$, $|y(+\infty)| \leq +\infty$; 2) среди слагаемых f_k $(k = \overline{1,n})$ слагаемые с номерами $i = \overline{1,s}$ $(2 \leq s \leq n)$ являются асимптотически главными для данного п-решения $y(t)$.

Сформулируем одно из доказанных утверждений.

Пусть функция $v(t) \in \mathrm{C}^1_{\Delta(a)}$ такая, что $v(+\infty) = 0 \vee +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f_i(t,v(t),v'(t))}{f_1(t,v(t),v'(t))} = \widetilde{c}_i \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ $(i = \overline{1,s})$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f_j(t,v(t),v'(t))}{f_1(t,v(t),v'(t))} = 0$ $(j = \overline{s+1,n})$. Для того, чтобы $\exists$ хотя бы одно п-решение $y(t) \in \mathrm{C}^1_{\Delta(t_0)}$ ОДУ (1) с асимптотикой $y(t) \sim \ell v(t)$, $y'(t) \sim \ell v'(t)$, где $\ell \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, необходимо, чтобы $H = \sum_{i=1}^{s} \widetilde{c}_i \ell^{\alpha_i+\beta_i} = 0$, и достаточно, чтобы $H = 0$, $\sum_{i=1}^{s} \beta_i \widetilde{c}_i \ell^{\alpha_i+\beta_i-1} \neq 0$, $\sum_{i=1}^{s} (\alpha_i + \beta_i)\widetilde{c}_i \ell^{\alpha_i+\beta_i-1} \neq 0$.

[1] **Костин А. В.** Об асимптотических свойствах решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / Костин А. В. // Дифференц. уравн. – 1968. – Т. 4, № 7. – С. 1184–1195.

АППРОКСИМАЦИЯ НЕЧЕТКИХ R-РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ СРЕДНЕГО

Т. А. Комлева[1], Л. И. Плотникова[2]
[1]Кафедра Высшей Математики
Одесская Государственная Академия Строительства и Архитектуры
[2]Кафедра Высшей Математики и Моделирования Систем
Одесский Национальный Политехнический Университет
e-mail: t-komleva@ukr.net

Рассмотрим дифференциальное включение с нечеткой правой частью
$$\dot{x} \in \varepsilon F(t,x),\ x(0) = x^0, \tag{1}$$
где $F : R \times R^n \to E^n; \varepsilon > 0$ – малый параметр; $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]; L >$ > 0 – константа; E^n – пространство отображений $u : \mathrm{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих условиям: 1) u – нормально; 2) u – нечетко выпукло; 3) u – полунепрерывно сверху; 4) замыкание множества $\{x \in R^n : u(x) > 0\}$ – компактно. Пусть $D(u,v) = \sup\limits_{0\le\alpha\le1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha)$ – метрика в E^n, где $[u]^\alpha$ – α – срезка отображения $u \in E^n$.

В методе усреднения системе (1) ставится в соответствие дифференциальное включение $\dot{y} \in \varepsilon \bar{F}(y)$, $y(0) = x^0$, где $\bar{F}(x) =$ $= \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(t,x)dt$. Однако данный предел может не существовать, поэтому логичнее предположить существование таких отображений $F^-(x)$, $F^+(x)$, что справедливы оценки
$$\lim_{T\to\infty} \beta\left(F^-(x), \frac{1}{T}\int_0^T F(t,x)dt\right) = 0,$$
$$\lim_{T\to\infty} \beta\left(\frac{1}{T}\int_0^T F(t,x)dt, F^+(x)\right) = 0,$$
где $\beta(\cdot,\cdot)$ – полуотклонение на E^n и поставить в соответствие (1) следующие дифференциальные включения
$$\dot{x}^- \in \varepsilon F^-(x^-),\quad \dot{x}^+ \in \varepsilon F^+(x^+),\quad x^-(0) = x^+(0) = x^0. \tag{2}$$

В докладе приводятся условия, при которых $R^-(t) \subset R(t)+$ $+S_\eta(0)$, $R(t) \subset R^+(t) + S_\eta(0)$, $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, где $R(t), R^-(t), R^+(t)$ – соответствующие нечеткие R-решения включений (1),(2).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕ В ТОЧКУ ПОКОЯ

В.И. Коробов
Institute of Mathematics, Szczecin University, Poland
e-mail: korobow@univ.szczecin.pl
Кафедра дифференциальных уравнений и управления
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua

Рассматривается управляемость системы

$$\dot{x} = Ax + \varphi(u), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbf{R}^r, \tag{1}$$

не в точку покоя системы, при наличии заданных ограничений на управление. Приводится геометрический критерий управляемости, основанный на новом понятии — *условии возвращаемости* [1]. Если система (1) является 0-управляемой, т.е. $0 \in \operatorname{int} S$, то для некоторого $T > 0$ имеем $0 \in S(T)$. Будем говорить в этом случае, что выполняется *условие возвращаемости точки ноль в силу системы (1) за время* T.

Теорема [1]. *Для того, чтобы система (1) была* 0*-управляемой из окрестности, необходимо и достаточно, чтобы: 1) выполнялось условие возвращаемости точки ноль на некотором отрезке* $[T^*, T^* + a]$, $T^* \geq 0$, $a > 0$; *2) для некоторого* $m \geq 0$ *выполнялись два включения* $0 \in \operatorname{int} co\{\varphi(\Omega), A\varphi(\Omega), \ldots, A^m\varphi(\Omega)\}$, $0 \in \operatorname{int} co\{\varphi(\Omega), -A\varphi(\Omega), \ldots, (-1)^m A^m\varphi(\Omega)\}$. *Если матрица* A *не имеет вещественных собственных значений, то условие 2) может быть заменено на более слабое условие — 2′) для некоторого* $m \geq 0$ *справедливо* $\operatorname{int}\, \mathrm{co}\{0, \varphi(\Omega), A\varphi(\Omega), \ldots, A^m\varphi(\Omega)\} \neq \{\emptyset\}$.

Этот критерий является дальнейшим развитием результатов работы [2].

[1] **Korobov V. I.** Geometric Criterion for Controllability under Arbitrary Constraints on the Control / Korobov V.I. // J. Optimiz. and Appl. – 2007. – Vol. 134. – P. 161–176.

[2] **Коробов В. И.** Геометрический критерий локальной управляемости динамических систем при наличии ограничений на управление / Коробов В. И. // Дифференциальные уравнения. – 1979. Т. 15, № 9. – С. 1592–1599.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНОМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.И. Коробов*,**, Е.В. Скляр*, В.А. Скорик**
* Institute of Mathematics, Szczecin University, Poland
e-mail: {korobow, sklar}@univ.szczecin.pl
**Кафедра дифференциальных уравнений и управления,
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
e-mail: {vkorobov, skoryk}@univer.kharkov.ua

Рассматривается ранее не исследованный класс систем вида $\dot{x} = a(x) + B(x)\beta(x,u)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}$, где $B(x)$ — $(n\times m)$-матрица $(2 \le m \le n)$, столбцами которой являются вектор-функции $b_1(x)$, $\ldots$, $b_m(x)$, $\beta(x,u)$ — m-мерная вектор-функция с компонентами $\beta_1(x,u)$, $\ldots$, $\beta_m(x,u)$, u — одномерное управление.

Предложен алгоритм отображаемости таких систем на системы "более простого" вида, подобный алгоритму для линейных управляемых систем с многомерным управлением, данному в работе [1]. Важным отличием является то, что в рассматриваемых нами системах управление является одномерным. На основе этого, используя метод функции управляемости [2], получены достаточные условия управляемости таких систем. При этом описано построение управлений, переводящих произвольную начальную точку в точку покоя вдоль траекторий соответствующих замкнутых систем за некоторое конечное время. Выделен класс систем, названный *ступеньчатыми системами*, для которых построены отображения, с помощью которых они отображаются на системы специального вида. Полученные результаты проиллюстрировано примерами. В частности, решена задача полной остановки двузвенного маятника.

[1] **Коробов В. И.** Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / Коробов В. И. // Математический сборник. – 1979. – Т. 109(151), № 4(8). – С. 582 – 606.

[2] **Коробов В. И.** Метод функции управляемости / Коробов В. И. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2007. – 576 с.

РОЗРИВНІ ЦИКЛИ ІМПУЛЬСНИХ АВТОНОМНИХ СИСТЕМ НА ПЛОЩИНІ

І.І. Король
Кафедра диференціальних рівнянь та математичної фізики
Ужгородський національний університет
e-mail: korol.ihor@gmail.com

Розглядається питання існування розривних циклів двовимірної лінійної імпульсної динамічної системи [1]

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f, \quad \Delta x|_{<a,x>=0} = Bx + c, \quad x, f, c, a \in R^2, \qquad (1)$$

яка піддається імпульсному збуренню в момент потрапляння точки фазової кривої на пряму перпендикулярну заданому вектору a, і при цьому фазова траєкторія переводиться в іншу точку цієї ж прямої. Знайдено всі можливі періоди розривних циклів відповідної однорідної імпульсної системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad \Delta x|_{<a,x>=0} = Bx, \quad x, a \in R^2, \qquad (2)$$

з'ясовано вигляд матриць A і B, при яких розривні цикли існують, встановлено їх породжуючі точки.

Також знайдено всі можливі розривні цикли неоднорідної системи (1), співвідношення між елементами матриць A, B та векторів a, c, f, при яких відбувається рух по цих періодичних траєкторіях.

При цьому розглядаються як некритичний випадок – коли відповідна однорідна динамічна система (2) не має T-періодичних розв'язків, так і критичний – коли існують розв'язки системи (2) заданого періоду T.

[1] **Импульсные** дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. / Н.А. Перестюк, В.А. Плотников, А.М. Самойленко, Н.В. Скрипник – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Г. А. Котов

Кафедра высшей и прикладной математики и информатики
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры
e-mail: butkot83@mail.ru

Исследована полурегулярная прецессия второго типа, т. е. $\dot{\varphi} = n = const$. Пусть уравнения движения гиростата записаны в виде

$$A\dot{\overline{\omega}} = \left(A\overline{\omega} + \overline{\lambda}\right) \times \overline{\omega} + \overline{\omega} \times B\overline{\nu} + \overline{s} \times \overline{\nu} + \overline{\nu} \times C\overline{\nu}, \dot{\overline{\nu}} = \overline{\nu} \times \overline{\omega}. \quad (1)$$

В [3] получено решение (1) с помощью метода параметризации. Автором было найдено решение (1) без использования параметризации. При выполнении условий $C_{22} = C_{11}$, $C_{12} = 0$, используя метод исследования прецессионных движений, предложенный Г. В. Гором, получены ограничения на параметры задачи:

$$\begin{gathered}
A_{12} = 0,\, A_{23} = 0, B_{22} = B_{11},\ B_{12} = 0,\ B_{23} = 0, C_{23} = 0,\\
\lambda_1 = a_0 B_{13} + nA_{13},\, \lambda_2 = a_0 B_{23} + nA_{23},\\
s_1 = a_0 C_{13}, s_2 = a_0 C_{23},\\
k = -a_0 n A_{33} + a_0 \lambda_3 - \tfrac{1}{2}\left(\left(a_0'\right)^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}\right),\\
E = \tfrac{1}{2}\left(\left(a_0'\right)^2 C_{11} + a_0^2 C_{33}\right) - a_0 s_3 + \tfrac{1}{2} n^2 A_{33}.
\end{gathered} \quad (2)$$

Решением задачи (1) являются $\bar{\nu} = \left(a_0' \sin\varphi, a_0' \cos\varphi, a_0\right)$, $\dot{\bar{\omega}} = \dot{\varphi}\,\bar{a} + \dot{\psi}\,\bar{\nu}$, где $a_0' = \sqrt{1 - a_0^2}, \bar{a} = (0, 0, 1)\,, \dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} = f(\varphi)$ – функция от φ, не являющаяся тождественной константой. В случаях $A_{11} = A_{22}$ и $A_{11} \neq A_{22}$ с учетом (2) выписаны соотношения между параметрами задачи в явном виде, при которых гиростат будет совершать полурегулярную прецессию второго типа.

[1] **Горр Г. В.** Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел / Горр Г. В., Мазнев А. В., Щетинина Е. К. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.

ПРОБЛЕМЫ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.И. Кузьмич, Ю.С. Павленко
Кафедра прикладной математики
Волынский национальный университет им. Леси Украинки
e-mail: lenamaks79@mail.ru

Гибридные системы (ГС) [1] используются для исследования динамики сложных динамических систем. Гибридными являются системы, динамика которых описывается дискретными и непрерывными элементами. В работе исследуются ГС с временным законом переключения состоящие из набора дискретных систем с запаздыванием.

Рассмотрим ГС, представленную набором дискретных подсистем с постоянными коэффициентами с запаздыванием

$$\Delta[x(k)] = A_i x(k) + B_i x(k-m), \tag{1}$$

$$\Delta[x(k)] = x(k+1) - x(k),\ i = \overline{1,N},\ x(k) \in R^n$$

каждая из которых действует на интервалах $k_{i-1} \leq k < k_i$. Подсистемы могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. В моменты переключений фазовые координаты сохраняют непрерывность в том смысле, что конец траектории одной подсистемы является началом последующей, т.е.

$$x(k_i - 0) = x(k_i + 0), i = \overline{1,N}.$$

В работе найдены оценки отклонения решений данного вида ГС с временным переключением от положения равновесия в конечный момент времени в зависимости от начального положения. Исследования проводятся с помощью метода функций Ляпунова.

[1] **Branicky Michael S.** Stability of Switched and Hybrid Systems. In: Proc. 3-rd IEEE CDC, 1994, pp.3498-3503.

[1]The paper was supported by National Scholarship Program of the Slovak Republic SAIA starting from 1.03.2010 to 1.06.2010 (with the Agreement No. 0416/2006 of April 18th 2006).

СРАВНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМОЙ СХЕМЫ АСИМПТОТИЧЕСКОО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И.А. КРЫЛОВА Ф.Л.ЧЕРНОУСЬКО ПРИ РЕШЕНИИ РЕГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ

Г.А. Курина, М.А. Калашникова
Кафедра математического анализа
Воронежский Государственный Университет
e-mail:Margarita-fresh@rambler.ru

Рассматривается задача минимизации функционала

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = \int_0^T F(x,u,t,\varepsilon)\,dt \to \min_u \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t,\varepsilon), x(0) = x_0 \tag{2}$$

Здесь $T > 0$ фиксировано, $t \in [0,T]$, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, ε— малый параметр. Проводится сранение двух методов асимптотического решения задачи (1), (2), а именно, метода последовательных приближений из [1], получаемого из (1), (2) при $\varepsilon = 0$, и метода прямой схемы асимптотического решения задач оптимального управления, заключающегося в непосредственной подстановке в условие задачи постулируемого асимптотического разложения решения в виде $x(t) = \sum\limits_{j\geq 0} \varepsilon^j x_j(t)$, $u(t) = \sum\limits_{j\geq 0} \varepsilon^j u_j(t)$ и определении серии задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики (см. например [2]).

Утверждение 1 n-е приближение решения регулярно возмущенной задачи (1)-(2), полученное при помощи прямой схемы, отличается от (n+1)-го приближения решения, полученного методом последовательных приближений, на величину порядка ε^{n+1}, то есть $\widehat{x_{n+1}} - \widetilde{x_n} = O(\varepsilon^{n+1})$, $\widehat{u_{n+1}} - \widetilde{u_n} = O(\varepsilon^{n+1})$, где $\widetilde{u_n} = \sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon^j u_j$, $\widetilde{x_n} = \sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon^j x_j$, $n = 0, 1, 2, ...$—n-е приближение решения из метода прямой схемы, а $(\widehat{u_{n+1}}, \widehat{x_{n+1}})$—(n+1)-ое приближение в методе последовательных приближений, если в качестве начального приближения взять решение вырожденной задачи, получаемой из (1)-(2) при $\varepsilon = 0$.

[1] **И.А.Крылов, Ф.Л. Черноусько** О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления//Журнал Вычислительной Математики и математической физики том 2, №6, 1962г.–стр 1132-1139.

[2] **М.Г. Дмитриев, Г.А. Курина** Сингулярные возмущения в задачах управления//Автоматика и Телемеханика №1, 2006г.–стр 3-51.

О КОНЕЧНЫХ ИГРАХ КОНВЕЯ

А. В. Лелеченко
Кафедра компьютерной алгебры и дискретной математики
Одесского национального университета им. И. И. Мечникова
e-mail: andrew.lelechenko@gmail.com

Игра Конвея (т. н. игра «жизнь») — это игра одного игрока на бесконечной клеточной доске. Каждая клетка может содержать или не содержать фишку; на следующем ходу фишки появляются в тех пустых клетках, которые граничат ровно с 3 занятыми, и убираются с тех занятых, которые имели ≤ 1 или ≥ 4 соседей.

Позиции можно разделить на исчезающие (через конечное число ходов доска пуста); периодические, которые порождают с некоторого хода периодическую последовательность непустых позиций (стабильные с $T = 1$ и пульсары с $T > 1$); апериодические, порождающие последовательность позиций без периода.

Мы вводим модификацию игры Конвея, рассматривая ее не на бесконечной поверхности без края, а на конечных: торе S^2, бутылке Клейна KB и проективной плоскости RP^2, — получая их из квадратной доски путем склейки противоположных сторон.

В силу конечности апериодических позиций не будет. Перечислим стабильные позиции и пульсары, указывая их периоды. Позиции, совпадающие при отражении, циклическом сдвиге и повороте (на $90°$ для S^2 и RP^2 и на $180°$ для KB), считаем за одну.

	ord 2	ord 3	ord 4	ord 5
S^2	1 ст.	5 ст.	21 ст., 36 п. $T = 2, 4, 8$	683 ст., 408 п. $T = 2..5, 10, 20$
KB	2 ст.	6 ст.	31 ст., 35 п. $T = 2, 8$	694 ст., 268 п. $T = 2..5, 10, 20, 40$
RP^2	1 ст., 1 п. $T = 2$	4 ст.	18 ст., 23 п. $T = 2, 18$	319 ст., 102 п. $T = 2, 3, 14$

В классической игре Конвея подобное богатство и многообразие позиций достижимо лишь на намного больших досках.

[1] **Зейферт Г.** Топология / Зейферт Г., Трельфалль В. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 448 с.

[2] **Conway J. H.** On Numbers and Games / Conway J. H. – Natick: AK Peters, LTD, 2003. – 256 p.

ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКІВ ІМПУЛЬСНОЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

К. Ю. Мамса
Кафедра інтегральних і диференціальних рівнянь
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: pmo@univ.kiev.ua
О. С. Чернікова
Кафедра інтегральних і диференціальних рівнянь
Національний технічний університет України "КПІ"
e-mail: pmo@univ.kiev.ua

Розглядається система диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ t \neq \tau_i,\ \ \triangle x|_{t=\tau_i} = I_i(x),\ i = 1, 2, ... \tag{1}$$

де $t \geq 0$, $x \in R^n$, $f : R^{n+1} \mapsto R^n$, $I_i : R^n \mapsto R^n$, вектор-функції f і I_i такі, що будь-який розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ визначений при всіх $t \geq t_0$ і має місце властивість єдиності розв'язку в області визначення системи (1). Будемо вважати, що $x = (x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n) = (y, z), y = (x_1, ..., x_m), z = (x_{m+1}, ..., x_n)$. За допомогою методу функцій Ляпунова та методики застосування прямого методу Ляпунова, розвинутої в [1], встановлено достатні умови обмеженості розв'язків (у різних сенсах) системи (1). Зокрема, встановлено достатні умови y -обмеженості, рівномірної відносно t_0 граничної y-обмеженості, (h_0, h) -обмеженості розв'язків системи (1). Одержані достатні умови обмеженості розв'язків поширюють деякі з результатів роботи [2] на клас імпульсних систем диференціальних рівнянь.

[1] **Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.** Impulsive Differential Equations / Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. – Singapure: World Scientific, 1995. – 462 p.

[2] **Румянцев В. В., Озиранер А. С.** Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / Румянцев В. В., Озиранер А. С. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ И АНАЛИЗ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Ю. В. Михлин
Кафедра прикладной математики
Национальный Технический Университет "ХПИ"
e-mail: yuri_mikhlin@mail.ru

Нелинейные нормальные формы колебаний представляют собой обобщение нормальных колебаний линейных систем. В режиме нормальных колебаний все позиционные координаты конечномерной нелинейной системы являются однозначными функциями одной из них. Криволинейные траектории нормальных колебаний консервативных систем в конфигурационном пространстве могут быть построены в виде степенных рядов. В некоторых классах систем решения для произвольных значений амплитуды определяются с использованием рациональных аппроксимаций Паде. Нелинейные нормальные колебания могут быть найдены также в неавтономных или автоколебательных системах, близких к консервативным. Для построения решений в этом случае используется метод Раушера. При исследовании устойчивости нормальных колебаний во многих случаях с успехом может быть использована алгебраизация уравнений в вариациях. При этом в качестве новой независимой переменной выбирается одна из позиционных координат. Методы теории нормальных колебаний используются в таких прикладных задачах, как задачи нелинейной динамики оболочек, задачи гашения колебаний с использованием нелинейных динамических гасителей, задачи нелинейной динамики автомобиля и др.

[1] **Маневич Л. И.** Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем / Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н.; – Москва : Наука, 1989. – 216 с.

[2] **Vakakis A. F.** Normal modes and localization in nonlinear systems / Vakakis A. F., Manevitch L. I., Mikhlin Yu. V. et al. – New York: Wiley, 1996. – 552 p.

[3] **Mikhlin Yu.** An application of the Ince algebraization to the stability of non-linear normal vibration modes / Yu. Mikhlin, A. Zhupiev // Int. Journal of Nonlinear Mechanics. – 1997. – V. 32. – P. 493–509.

[4] **Avramov K.** Asymptotical analysis of nonlinear dynamics of symply supported cylindrical shells / K. Avramov, Yu. Mikhlin, E. Kurilov // Nonlinear Dynamics. – 2007. – V. 47. – P. 331–352.

[5] **Avramov K.** Snap-through truss as a vibration absorber / K. Avramov, Yu. Mikhlin // Journal of Vibration and Control. – 2004. – V. 10. – P. 291–308.

[6] **Mikhlin Yu.** Dynamical interaction of an elastic system and essentially nonlinear absorber / Yu. Mikhlin, S. Reshetnikova // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – V. 283. – P. 91–120.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С НЕЧЕТКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

И. В. Молчанюк
Кафедра прикладной вычислительной математики и САПР
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
e-mail: i-molchanyuk@ukr.net

Пусть поведение объекта описывается нечетким линейным дифференциальным включением, содержащим управление

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u + C(t)V, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор; $u(t) \in U(t)$ – вектор управления; $U(\cdot) : R^1 \to Conv(R^m)$ – многозначное отображение; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – матрицы соответствующих размерностей $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(n \times k)$; V – нечеткое множество с характеристической функцией $\mu(x)$, $\mu(\cdot) : R^k \to [0,1]$, которые удовлетворяют некоторым условиям.

В соответствие системе (1) поставим линейное управляемое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u + C(t)[V]^\alpha \quad x(0) = x_0,$$

где $[V]^\alpha$ – некоторая α – срезка нечеткого множества V, $\alpha \in [0,1]$.

Для исследуемого типа систем получены свойства нечеткого пучка траекторий; доказаны условия компактности и выпуклости множества достижимости; рассмотрены задачи быстродействия для рассматриваемого типа включений; рассмотрены задачи встречи N нечетких объектов; введены понятия π_1-, π_2-, π_3-нечетких оптимальных управлений для рассматриваемого типа систем, получены достаточные и необходимые и достаточные условия существования такого типа управлений; обоснована схема усреднения для непериодической и периодической правой части нечетких систем; доказаны теоремы близости нечетких пучков траекторий линейных дифференциальных включений с нечеткой правой частью по нечетким критериям качества.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

А. В. Нестеров
Кафедра прикладной математики
Российский государственный социальный универсистет
e-mail: andrenesterov@yandex.ru

Строится формальное асимптотическое представление (ФАП) по малому параметру решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенных систем уравнений вида

$$\varepsilon^2(U_t + DU_x) = AU + \mu F(U), x > 0, t > 0,$$

$$U(x,0) = U^0(x), U(0,t) = \Phi^0(t),$$

где $U(x,t) = \{u_i(x,t)\}, (i = \overline{1,n})$ – вектор решений, $D = diag\|d_{ii}\|_1^n$, $d_{ii} > 0, rangA = n-1$, $F(U)$- нелинейность,$0 < \varepsilon << 1$. Параметр μ может принимать значения $\mu = 0, \mu = \varepsilon^2, \mu = \varepsilon$.

Особенностью задачи является разрыв регулярной части ФАП на некоторой линии, что говорит о наличие переходного слоя у точного решения. ФАП решения строится вне малой окрестности точки $(0,0)$ в виде суммы сглаженой регулярной части $\tilde{U}$, пограничных функций P, Q и функции переходного слоя S, которая описывается параболическим уравнением. Аналогичные результаты получены для случая, когда нелинейность $F(U)$ заменяется оператором $F(U) = CU_{xx}$, $C = diag\|c_{ii}\|_1^n$, $c_{ii} > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(коды проектов 08-06-00302, 09-01-12166).

[1] **Васильева А. Б.** Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. М.: Изд-во МГУ, 1978. – 262 с.

[2] **Нестеров А. В.** Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных с малой нелинейностью в критическом случае / Нестеров А. В., Шулико О. В. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. – Т. 47, №3. – С. 438–444.

УСРЕДНЕНИЕ ОРБИТАЛЬНО УСТОЙЧИВЫХ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ

В. А. Осадчий, О. А. Осадчая
Кафедра оптимального управления и экономической кибернетики
Институт математики, экономики и механики
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
e-mail: osd@normaplus.com, smile2905@mail.ru

Рассмотрим в области $Q = \{(t,x) | t \geq 0, x \in D \subset R^n\}$ систему стандартного вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,x), \tag{1}$$

где $X(t,x) = \begin{cases} X_1(t,x), \Phi(t,x) \leq 0 \\ X_2(t,x), \Phi(t,x) > 0 \end{cases}$;

$x(t), X(t,x)$ – n-мерные вектор функции;

$X(t,x), \Phi(t,x)$ – 2π-периодичны по t;

$\varepsilon > 0$ – малый параметр;

$S = \{(t,x) | \Phi(t,x) = 0\}$ – поверхность разрывов правых частей.

Системе (1) ставится в соответствие следующая усредненная система

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \overline{X}(\xi), \tag{2}$$

где $\overline{X}(x) = \frac{1}{2\pi}[\int\limits_{I_1(x)} X_1(t,x)dt + \int\limits_{I_2(x)} X_2(t,x)dt]$;

$I_1(x) = \{t \in [0, 2\pi] | \Phi(t,x) \leq 0\}$;

$I_2(x) = [0, 2\pi] \setminus I_1(x)$,

имеющая периодическое решение $\xi = \xi(\varepsilon t)$, $\xi(\tau + T) = \xi(\tau)$, траектория которого C является асимптотически орбитально устойчивой.

Доказывается теорема, устанавливающая асимптотическую орбитальную близость исходного и усредненного объектов, то есть

$$\rho(x(t), C) < \eta,$$

где $x(t)$ – решение системы (1).

О ПРОБЛЕМЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О. А. Очаковская
Отдел теории функции
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
ochakovskaya@telenet.dn.ua

Пусть R^n – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Пусть P – отличный от константы многочлен от $n \geq 2$ переменных с комплексными коэффициентами и $P(D)$ – соответствующий дифференциальный оператор. Пусть S – некоторая сфера в R^n и B_S – открытый шар с границей S. Будем говорить, что функция $f \in C(S)$ допускает P – продолжение в B_S, если существует $F \in C(\overline{B_S})$, такая, что $F\,|_S = f$ и $P(D)F = 0$ в B_S в смысле распределений.

Проблема 1. Пусть $G \subset R^n$ – непустое открытое множество и Σ – некоторая совокупность сфер $S \subset G$, таких, что $B_S \subset G$. Пусть $f \in C(G)$ и для любой сферы $S \in \Sigma$ функция $f\,|_S$ допускает P – продолжение в шар B_S. При каких условиях на G, Σ, P можно утверждать, что $P(D)f = 0$ в G в смысле распределений?

Если $n = 2$ и $P(D) = \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}$, то условие P – продолжения означает возможность аналитического продолжения с соответствующих окружностей. Этот случай и различные его обобщения ранее изучались многими авторами (см., например, [3]. и библиографию к этой работе).

Мы рассматриваем случай, когда P - однородный гармонический многочлен.

Теорема 1. Пусть Σ – множество всех сфер с радиусом r лежащих в полосе G ширины $R > r$. Пусть также $f \in C(G)$ и для любой сферы $S \in \Sigma$ функция $f\,|_S$ допускает P - продолжение в шар B_S. Предположим, что при некотором $\varepsilon \in (0, R-r)$ равенство $P(D)f = 0$ выполнено в некотором открытом шаре радиуса $r+\varepsilon$, лежащем в G. Тогда это равенство выполнено во всей G.

[1] **Volchkov V. V.** Integral Geometry and Convolution Equations / Volchkov V. V. / Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.

ЗАСТОСУВАННЯ БАГАТОЗНАЧНОГО АНАЛІЗУ ДО ЗАДАЧ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

В. В. Пічкур
Кафедра моделювання складних систем
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: vpichkur@gmail.com

При побудові математичних моделей, як правило, параметри системи та початкові умови відомі з похибкою. В результаті має місце розкид початкових умов, а поле напрямків задається багатозначним відображенням. Крім того, існують обмеження на фазові змінні і параметри, які випливають з можливих умов функціонування системи на заданому часовому проміжку. У такий спосіб, отримуємо постановку задачі практичної стійкості незбуреного розв'язку диференціального включення. Дослідження в сфері практичної стійкості мають чітку прикладну направленість. Це пов'язано з тим, що ряд задач оптимального проектування технічних систем, зокрема прискорюючо-фокусуючих, зводяться до побудови областей практичної стійкості [1]. В даній роботі центральним об'єктом дослідження є максимальна за включенням множина початкових умов. Вводяться означення чотирьох видів практичної стійкості диференціальних включень (внутрішня сильна, внутрішня слабка, зовнішня сильна, зовнішня слабка). Аналізуються властивості максимальної множини для кожного виду практичної стійкості, такі як критерії належності точки до границі і внутрішності, неперервна залежність від фазових обмежень та часу. Для лінійних диференціальних включень одержано опорні функції та функції Мінковського [2].

[1] **Бублик Б. Н.** Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.

[2] **Башняков О. М.** Практична стійкість, оцінки та оптимізація / Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. – К.: Київський університет. – 2008. – 383 с.

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. В. Пичкур, М. В. Боднарь
Кафедра оптимального управления и экономической кибернетики
Институт математики, экономики и механики
Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова
e-mail: bodnarmari@gmail.com

Методы динамического программирования применяются не только в дискретных, но и в непрерывных управляемых процессах, например, в таких процессах, когда в каждый момент определенного интервала времени необходимо принимать решение. Динамическое программирование также дало новый подход к задачам вариационного исчисления. В этой работе для более простого нахождения множества достижимости, состоящая из множества таких состояний, в которые можно привести динамическую систему с помощью допустимого управления с начальной точки (начального состояния) за заданный промежуток времени, используется метод динамического программирования. Рассматривается следующая задача:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x, u, t\right),$$

$$x\left(t\right) \in X\left(t\right),\ u\left(t\right) \in U\left(t\right),\ t \in \left[t_0, T\right],$$

с функционалом

$$I\left(u, x\right) = \int_{t_0}^{T} f_0\left(x, u, t\right) dt + \Phi(x\left(t_0\right))$$

Для упрщения используем вспомагательную задачу

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x, u, t\right),\ x\left(s\right) = x_*\left(s\right), \qquad (1)$$

$$x\left(t\right) \in X\left(t\right),\ u\left(t\right) \in U\left(t\right),\ t \in \left[t_0, s\right], \qquad (2)$$

с функционалом

$$I_s\,(u,x) = \int_{t_0}^{s} f_0\,(x,u,t)\,dt + \Phi(x(t_0)) \qquad (3)$$

Используя принци оптимальности Беллмана и функцию Беллмана, находим оптимальную функцию управления, оптимальное значение критерия и множество достижимости. В качестве примера можно рассмотреть задачу оптимального управления линейной системой с квадратичным критерием качества.Для неё получили такое множество достижимости:

Y (s) $= \{z \in R^n : B(z,s) \leq r^2\}$, где *B(z,s)* – функция Беллмана задачи (1)-(3)

[1] **Беллман Р.** Динамическое программирование / Беллман Р.; пер. с англ. И. М. Андреевой, А. А. Корбута, И. В. Романовского, И. Н. Соколовой. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400с.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДО ЗАДАЧІ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ СИСТЕМ З ФІКСОВАНИМИ ТОЧКАМИ ПЕРЕМИКАННЯ

В. В. Пічкур, Є. М. Страхов
Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
e-mail: vpichkur@gmail.com, swebus86@gmail.com

Розглядається задача оптимального керування

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt + \Phi(x(T)) \to inf \tag{1}$$

за умов

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

де $x(t) \in X(t) \subseteq R^n$, $u(t) \in U(t) \subseteq R^m$, $t \in [t_0, T]$, $f(x,u,t)$ – n-вимірна вектор-функція, що задовольняє умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші, $f_0(x,u,t)$, $\Phi(x)$ – неперервні функції. Нехай керування в задачі (1), (2) задано у структурній формі

$$u(t) = \Psi_i(t, b_i), t \in [t_i, t_{i+1}), \tag{3}$$

де функції $u(t) = \Psi_i(t, b_i)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$ є неперервно диференційованими за сукупністю змінних, $t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ – точки перемикання, $b_i \in M_i$ – числові параметри, $M_i \subset R^{k_i}$, $i = 0, ..., N-1$, k_i – натуральні числа. Моменти $t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ є фіксованими. Таким способом, задача (1)-(3) є задачею структурно-параметричної оптимізації з керуванням, заданим в структурному класі (3). Припускаємо, що розв'язок такої задачі існує. Тоді суть принципу оптимальності Белмана полягає в тому, що якщо процес $(\tilde{u}(t), \tilde{x}(t))$ є розв'язком задачі оптимального керування на відрізку $[t_s, T]$, де t_s – деяка фіксована точка перемикання, то на цьому ж відрізку даний процес буде співпадати з оптимальним процесом задачі (1)-(3).

В роботі означено функцію Белмана для задачі (1)-(3), отримано рівняння Белмана в інтегральній та інтегро-диференціальній формі, побудовано алгоритм динамічного програмування для отримання оптимальних значень параметрів b_i.

Було розглянуто лінійну систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + u(t)$$

з квадратичним функціоналом якості

$$J(x,u) = \langle P_0 x(T), x(T) \rangle$$

та структурою керування у вигляді

$$u(t) = R(b_i)x(t), t \in (t_i, t_{i+1}),$$

де $A(t)$ – матриця розмірності nxn з неперервними компонентами, P_0 – постійна матриця розмірності nxn, $R(b_i)$ – матриця розмірності mxn, яка гладко залежить від параметрів b_i.

Побудовано інтегральне рівняння Белмана з функцією Белмана у вигляді $B(z,t) = \langle P(t)z, z \rangle$ та запропоновано чисельний алгоритм для визначення оптимальних значень параметрів b_i. Для тестування роботи алгоритму був проведений обчислювальний експеримент.

[1] **Бублик Б. Н.** Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. – К. : Наукова думка, 1985. – 304 с.

[2] **Башняков О. М.** Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем / Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. – К. : Київський університет, 2000. – 197 с.

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Е.В. Платонова
Кафедра ОУЭК
Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова
e-mail: Jane.platonova@gmail.com

В докладе приводится обоснование применения приближённого метода решения линейных задач оптимального управления с малым параметром и линейным функционалом.

Пусть движение объекта описывается системой уравнений вида:

$$\dot{x} = \varepsilon[A(t)x + Bu], u \in U, J[u] = l^T x(L\varepsilon^{-1}), ||l|| = 1, \qquad (1)$$

где $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $u \in U \subset conv(R^n)$, $0 \in U$, $A(t)$ -$n \times n$ матрица, $a_{ij}(t)$ - 2π-периодические функции времени, $t \in [t_0, L\varepsilon^{-1}]$. Требуется найти допустимое управление $u(t)$, доставляющее максимум функционалу $J[u]$.

Задаче (1) поставим в соответствие частично усреднённую:

$$\dot{y} = \varepsilon[\overline{A}y + Bu_k], u_k \in U_k, J[u_k] = l^T y(L\varepsilon^{-1}), \qquad (2)$$

в которой U_k сильно выпуклый компакт, $0 \in U_k$, $\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists k$: расстояние по Хаусдорфу $h(U, U_k) < \varepsilon_1$, $\overline{A} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(t)dt$. Для системы (2) оптимальное управление непрерывно по t. В докладе приведены аппроксимации множества U вида $|u_i| \leq \alpha_i$, $i = \overline{1,n}$, которые удовлетворяют всем условиям задачи (2). Например, при $n = 2$ граница множества имеет вид: $\delta U_k = (R\cos(q_1 + q_2(\varphi - q_1)), R\sin(q_1 + q_2(\varphi - q_1)) + z_2), q_1 = q_1(\varphi), q_2 = q_2(\varphi), z_1 = z_1(\varphi), z_2 = z_2(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$.

Доказана **теорема** о близости решений задач (1) и (2) при $x(t_0) = y(t_0)$:

Пусть $(x^*(t), u^*(t), J^*)$ и $(y^*(t), u_k^*(t), J_k^*)$ решения задач (1) и (2) соответственно, а $x_k^*(t)$-траектория системы (1) при $u(t) = u_k^*(t)$. Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существуют такие $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ и целое $k_0(\eta, L)$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $k > k_0$ и $t \in [t_0, L\varepsilon^{-1}]$ справеливы следующие оценки:

$$||x^*(t) - y^*(t)|| \leq \eta, ||x^*(t) - x_k^*(t)|| \leq \eta$$

АСИМПТОТИКА РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
e-mail: vlryazanov1@rambler.ru, brusin2006@rambler.ru

Рассмотрим уравнение Бельтрами

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z \tag{1}$$

в единичном круге $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, где $f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2$ и $f_z = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$. Гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{loc}$ называется регулярным решением (1), если (1) выполняется п.в. и якобиан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ п.в. Пусть $K_\mu(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ и $K^T_\mu(z) = \frac{\left|1-\frac{\overline{z}}{z}\mu(z)\right|^2}{1-|\mu(z)|^2}$. Заметим, что $K^T_\mu(z) \leq K_\mu(z)$.

Теорема. *Пусть $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ – регулярное решение уравнения (1) с $K_\mu \in L^1_{loc}$ и $f(0) = 0$. Тогда для любой возрастающей выпуклой функции $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$*

$$|f(z)| \ \leq \ C \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int\limits_{eM(|z|)}^{\frac{1}{|z|}} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(r)} \right\}, \quad z \in \mathbf{D}, \tag{2}$$

где $C \leq 64$ и $M(r)$ – среднее значение функции $\Phi \circ K^T_\mu$ над кольцом $D_r = \{\zeta \in \mathbf{C} : r < |\zeta| < 1\}$.

Оценка (2) эффективна, например, если величина $M(r)$ ограничена, а $\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} = \infty$. Выбирая, в частности, $\Phi(t) = e^t$ имеем:

Следствие. *Регулярные решения $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ уравнения (1) удовлетворяют асимптотической оценке*

$$|f(z)| = O\left(\log^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{|z| M(|z|)} \right) \tag{3}$$

при условии, что $M(|z|) < 1/|z|$ для малых $r = |z|$. Оценка (3) эффективна при $M(r) = o\left(\frac{1}{r}\right)$ для $r \to 0$.

Существование аналитических решений некоторых сингулярных дифференциальных систем

Г.Е.Самкова, Н.В. Шарай
Кафедра дифференциальных уравнений
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
e-mail: rusnat@i.ua

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} F(z,W,W')=0, & (1)\\ W(z)\longrightarrow 0, z\longrightarrow 0, z\in D & (2)\end{cases}$$

где вектор- функция $F: D\times G\times G_1\to C^m$, аналитична в области $D\times G\times G_1$; область $D\subset C, 0\in\partial D$, области $G, G_1\subset C^n, (0,0,0)\in$ $\in\partial(D\times G\times G_1)$.

Изучим решения задачи Коши (1)-(2) при условии

$$W'(z)\to 0, z\to 0, z\in D \tag{3}$$

в предположении,что система (1) не разрешена относительно W'.

Исследуются вопросы о разрешимости системы (1) относительно W', или относительно части компонент вектора W' в некоторой подобласти окрестности точки (0,0,0),а также о существовании и свойствах решений задачи Коши (1)-(2), удовлетворяющих условию (3). В зависимости от вида области (радиальной, кругообразной, круговой области, области Гартокса и других) система (1) сводится к системе, которая разрешена или частично разрешена относительно W'. При исследованиях использованы результаты теории аналитических функций многих переменных, теорема Руше, идеи метода аналитического продолжения решений и топологиеский принцип Важевского.

[1] **Marz R.** New Results concerning Index-3 Differential AlgebraicEquations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. —1989. — P. 140, № 1. — C. 177–199.

[2] **Самкова Г.Е.** Существование и асимптотическое поведение аналитических решений некоторых сингулярных дифференциальных систем, не разрешенных относительно производных. // Диф. уравнения.-1991.- 27,№11.-с.2012-2013.

ПОБУДОВА МАКСИМАЛЬНИХ МНОЖИН ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

М. С. Сасонкіна

Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

e-mail: masonmas@gmail.com

Розглянемо дискретне включення вигляду

$$x(k+1) \in f_k(x(k)), k \in [0, N], \tag{1}$$

де $f_k : D \to comp(D)$ — відкрите напівнеперервне зверху багатозначне відображення, яке визначене в області $D \subset R^n$. Нехай $G_0 \in comp(R^n)$, $\Phi(k) \in comp(R^n)$ – множина фазових обмежень, $0 \in int\Phi(k)$, $0 \in G_0$, $k \in [0, N]$. Нульовий розв'язок включення (1) називається $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ – стійким, якщо для довільного $x_0 \in G_0$ кожен розв'язок $x(k, x_0)$ дискретного включення (1) задовольняє належить $\Phi(k)$ для всіх $k \in [0, N]$. Позначимо G_* множину всіх точок $x_0 \in D$ таких, що довільне $x(k, x_0) \in \Phi(k)$, $k \in [0, N]$. Можна показати, що G_* є компактом.

Теорема. Точка $x_0 \in \partial G_*$ тоді і тільки тоді, коли будь який розв'язок дискретного включення (1) $x(s, x_0) \in \Phi(s)$, $s \in [0, N]$ і існує таке $k \in [0, N]$ і такий розв'язок $x(k, x_0)$, що $x(k, x_0) \in \partial\Phi(k)$.

Розглянемо лінійне дискретне включення

$$x(k+1) \in A_k x(k) + U(k),$$

де $x(k) \in R^n$, A_k – невироджена матриця розмірності $n \times n$, $U(k) \in conv(R^n)$, $\Phi(k) \in conv(R^n)$, $0 \in intG_*$. Позначимо $\Theta_k = A_0 A_1 \cdots A_{k-1}$, $\Omega(k) = U(k-1) + \sum_{i=0}^{k-2} A_{i+1} U(i)$. Можна показати, що в цьому випадку $G_* \in conv(R^n)$. Опорна функція множини G_* має вигляд

$$c(G_*, \xi) = \bar{co} \min_{k \in [0,N]} (c(\Phi(k), (\Theta_k^T)^{-1} \xi)), \ \xi \in R^n.$$

Функціонал Мінковського для множини G_* записується так

$$m_*(x) = \max_{k \in [0,N]} \max_{\psi \in S} \frac{\langle \Theta_k x, \psi \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - c(\Omega(k), \psi)}$$

де S — одинична сфера.

АСИМПТОТИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

І. В. Семенишина, А. М. Ткачук
Кафедра математичних дисциплін
Кафедра вищої математики
Подільський державний аграрно-технічний університет
Київський національний університет харчових технологій
e-mail: ira_semenishina@mail.ru, tkachukam@ukr.net

Розглянуто імпульсні системи

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx}{dt} = Ax, \quad t \neq \tau_k; \\ &\Delta x\,|_{t=\tau_k} = Bx, \end{aligned} \tag{1}$$

де A, B – $(n \times m)$-матриці, τ_k – числова послідовність з R^1 така, що $\tau_k \to -\infty$ при $k \to -\infty$, $\tau_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, і

$$\begin{aligned} &\tfrac{dy}{dt} = Ay + f(t,y), \quad t \neq \tau_k(x); \\ &\Delta y\,|_{t=\tau_k} = By + J_k(y), \end{aligned} \tag{2}$$

$J_k : R^n \to R^n$. Говорять, що системи (1) і (2) асимптотично еквівалентні при $t \to \infty$, якщо між їх розв'язками можна встановити взаємно однозначну відповідність подібності таку, що для відповідних розв'язків $x(t)$ та $y(t)$ систем (1) і (2) виконується граничне співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} ||x(t) - y(t)|| = 0.$$

Одержано такий основний результат.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) дійсні частини власних чисел матриці A недодатні і власним числам з нульовою дійсною частиною відповідають одномірні жорданові клітини;

2) $AB = BA$; $||E - B|| \leq 1$;

3) існує невід'ємна функція $K(\tau) \in L_1(0;\infty)$ така, що $||f(t,y)|| \leq K(t)\,||y||$ для довільних $t \geq 0$, $y \in R^n$;

4) існує $\{D_k,\, k \geq 1\}$ – невід'ємна послідовність чисел така, що $||J_k(y)|| \leq D_k\,||y||$ для довільних $y \in R^n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} D_k < \infty$;

5) f – ліпшицева по y та неперервна за сукупністю змінних при $t \geq 0$, $x \in R^n$.

Тоді системи (1) та (2) асимптотично еквівалентні.

МАГІСТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Н. О. Смирнова, А. В. Дуборез
Кафедра оптимального керування та економиченої кібернетики
Інститут математики, економіки та механики
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова
e-mail: alena_duborez@mail.ru

В роботі розглядаються дві динамічні моделі:

1. Модель накопичення

$$PBX\left(T\right) \to max$$
$$\begin{cases} X\left(t\right) \geq \tilde{A}X\left(t\right) + B\left(X\left(t+1\right) - X\left(t\right)\right), t = 0, 1, \ldots, T-1, \\ X\left(t\right) \geq 0, t = 0, 1, \ldots, T. \end{cases} \tag{1}$$

2. Модель споживання

$$\sum_{t=1}^{T}(1+\delta^{-t})\Theta(t) \to \max,$$
$$\begin{cases} X(t) \geq AX(t) + B(X(t+1) - X(t)) + \Theta(t)q, \\ lX(t) = (1+g)^t L(0), \\ X(t) \geq 0, \quad \Theta(t) \geq 0, t = 0, 1, ..., T, \end{cases} \tag{2}$$

де:

$X(t)$ – вектор випуску продукції за період t;

$A \geq 0, B \geq 0$ – матриця коефіцієнтів збільшення витрат та матриця коефіцієнтів капіталу;

$\dot{P}$ – вектор оцінки запасів в останній період;

$q \geq 0$ – вектор структури споживання розміру (n x 1);

$\Theta(t)$ – об'єм споживання в період часу t;

δ – коефіцієнт дисконтування;

g – темп приросту;

l – вектор трудових затрат;

$L(t)$ – пропозиція робочої сили в період часу t;

Для обох моделей були отримані оптимальні траєкторії накопичення та споживання шляхом зведення задач (1) та (2) до ЗЛП великої розмірності.

Крім того були знайдені магістралі для кожної моделі та показано, що більшу частину часу оптимальна траєкторія знаходиться в ε-околі магістралі, та в якості наближеного розв'язку для поставленої задачі.

Розглянуто декілька модельних прикладів різної розмірності та різної тривалості. Усі результати супроводжуються графічними малюнками.

[1] **Альсевич В. В.** Математическая экономика. Конструктивная теория. Учебное пособие. / Альсевич В. В. - Москва : Наука, 1998. – 229 с.

[2] **Ашманов С. А.** Введение в математическую экономику / Ашманов С. А. - Москва : Наука, 1984. – 296 с.

[3] **Кубонива М.** Математическая экономика на ПК / Кубонива М. – Москва : Финансы и статистика, 1991.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. А. Стехун
Кафедра высшей математики
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
e-mail: emden@farlep.net

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''' = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$- непрерывная функция, $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$- непрерывная и медленно меняющаяся функция при $y \to Y_0$, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0}- односторонняя окрестность Y_0.

Решение y уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет условиям

$$y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t) y'(t)} = \lambda_0.$$

Для уравнения (1) выясняется вопрос о существовании и асимптотике $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- решений при всех возможных значениях λ_0.

В случае дифференциального уравнения третьего порядка, асимптотически близкого при $y \to Y_0$ к уравнению типа Эмдена-Фаулера, аналогичный вопрос исследовался в работах [1-2].

[1] **Евтухов В. М.** Асимптотические представления неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка / Евтухов В. М., Стехун А. А. / Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2004. – 47, № 4. – С. 82–87.

[2] **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений одного класса нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений третьего порядка / Евтухов В. М., Стехун А. А. / Укр. Мат. Журнал. – 2007. – 59, № 10. – С. 1363–1375.

ПРО ІСНУВАННЯ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ТА ЗАЛЕЖНІСТЬ ЇХ ВІД ПАРАМЕТРІВ

Ю. В. Теплінський, К. В. Пасюк
Кафедра диференціальних рівнянь та прикладної математики
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
e-mail: yuriy-teplinsky@yandex.ru

У доповіді розглянуто систему рівнянь загального виду

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} = a(p,\varphi), \quad \frac{dx(t)}{dt} = P_1(p,x(t),x(t+Q))x(t)+\\ +F(p,v(\varphi^p,t),x(t),x(t+\Theta))x(t+\Delta)+c(p,\varphi^p,t),\end{aligned} \tag{1}$$

де $p \in [p_1,p_2] \subset R^1$ — додатний числовий параметр; φ та x належать простору числових послідовностей $\mathbf{m}$; $\varphi_t^p(\varphi)$ — розв'язок першого рівняння цієї системи такий, що $\varphi_0^p(\varphi) = \varphi \in T_\infty$; T_∞ — нескінченновимірний тор; через $c(p,\varphi^p,t)$ позначено вектор-функцію

$$(c_1(p,z_1(p,\varphi,t),z_2(p,\varphi,t),\ldots),c_2(p,z_1(p,\varphi,t),z_2(p,\varphi,t),\ldots),\ldots),$$

точки $z_i(p,\varphi,t) = \left(\varphi^p_{1_{t+\Delta_{i1}}}(\varphi),\varphi^p_{2_{t+\Delta_{i2}}}(\varphi),...\right)$ $\forall t \in R^1$ і $\forall p \in [p_1,p_2]$ належать тору T_∞, а через $v(\varphi^p,t)$ позначено функцію

$$\{v_1(\psi_1(\varphi^p,t),\psi_2(\varphi^p,t),\ldots),v_2(\psi_1(\varphi^p,t),\psi_2(\varphi^p,t),\ldots),\ldots\},$$

причому точки $\psi_i(\varphi^p,t) = \left(\varphi^p_{1_{t+\Theta_{i1}}}(\varphi),\varphi^p_{2_{t+\Theta_{i2}}}(\varphi),\ldots\right)$ при вказаних t та p теж належать тору T_∞; $x(t+\Delta) = (x_1(t+\Delta_1),x_2(t+ +\Delta_2),\ldots)$; $x(t+\Theta) = (x_1(t+\Theta_1),x_2(t+\Theta_2),\ldots)$; $x(t+Q) = = (x_1(t+Q_1),x_2(t+Q_2),\ldots)$; Δ_{ij}, Δ_i, Θ_i, Θ_{ij}, Q_i — сталі відхилення аргументу t довільного знаку ($\{i,j\} \subset N$); $P_1(p,x,\chi)$ та $F(p,v,x,\chi)$ — нескінченні матриці; диференціювання векторних функцій розуміється в покоординатному сенсі.

Знайдено достатні коефіцієнтні умови, при яких система рівнянь (1) визначає в просторі $\mathbf{m}$ інваріантний тор $\mathbf{T}$, породжуюча функція якого $u(p,\varphi) : [p_1,p_2] \times T_\infty \to \mathbf{m}$ неперервна за сукупністю змінних φ та p.

ПРО СТІЙКІСТЬ ІНВАРІАНТНИХ МНОГОВИДІВ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

П. В. Фекета
Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: petro.feketa@gmail.com

Доповідь присвячена встановленню достатніх умов асимптотичної стійкості інваріантного многовида імпульсної системи диференціальних рівнянь, визначеної в прямому добутку m-вимірного тора T^m і n-вимірного евклідового простору, вигляду

$$\begin{gathered}\dot{\varphi} = a(\varphi), \dot{x} = A_0(\varphi)x + A_1(\varphi, x)x + f(\varphi), \varphi \notin \Gamma,\\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B_0(\varphi)x + B_1(\varphi, x)x + g(\varphi),\end{gathered} \tag{1}$$

де $\Gamma = \{\varphi \in T^m : \Phi(\varphi) = 0\}$, $\Phi(\varphi)$ – неперервна скалярна 2π-періодична по кожній компоненті φ_j, $j = 1, ..m$ функція. Позначимо $\Omega = \bigcup_{\varphi \in T^m} \Omega_\varphi$, де Ω_φ - ω-гранична множина додатньої півтраекторії $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in T^m$, $t \in [0, +\infty)$ розв'язку першого рівняння системи (1). Особливу цікавість викликають системи, елементи яких володіють певними властивостями лише на ω-граничній множині Ω, а не на всьому торі T^m. Тому розглянемо систему (1) в припущенні, що матриці $A_0(\varphi)$ і $B_0(\varphi)$ на множині Ω сталі, тобто $A_0(\varphi)|_{\varphi \in \Omega} = \tilde{A}$, $B_0(\varphi)|_{\varphi \in \Omega} = \tilde{B}$. Достатні умови асимптотичної стійкості інваріантного многовида системи (1) можна сформулювати в термінах власних значень сталих матриць $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$. Аналогічні системи без імпульсних збурень розглядалися в [3].

[1] **Самойленко А. М.** Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. / Самойленко А. М. – М. : Наука, 1987. – 304 с.

[2] **Самойленко А. М.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – К.: Выща шк., 1987. – 288 с.

[3] **Перестюк М. О.** Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь / М. О. Перестюк, С. І. Балога // Нелінійні коливання. – 2008. – 11, № 4. – С. 520–529.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА

В. М. Харьков
Кафедра дифференциальных уравнений
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
e-mail: kharkov_v_m@mail.ru

Рассматривается разностное уравнение второго порядка

$$\Delta^2 y_n = \alpha p_n |y_{n+1}|^\sigma sign\, y_{n+1}, \tag{1}$$

где $\alpha \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in R \setminus \{0, 1\}$ и последовательность p_n удовлетворяет условию

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n \Delta p_n}{p_n} = k, \quad k \in R.$$

Уравнение (1) является дискретным аналогом обобщенного дифференциального уравнения Эмдена-Фаулера. Асимптотические свойства его решений были подробно исследованы в монографии [1]. Данный доклад посвящен описанию асимптотических представлений некоторых классов положительных решений уравнения (1) при $n \to +\infty$.

[1] **Кигурадзе И. Т.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. – Москва : Наука, 1990. – 430 с.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СИСТЕМ ТЕЛ В СРЕДАХ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Ф.Л. Черноусько
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: chern@ipmnet.ru

Изучаются различные способы управляемого перемещения механических систем в средах с сопротивлением, основанные на специальных периодических относительных движениях тел, входящих в состав системы. Рассмотрены следующие типы систем.

1. Многозвенные системы, способные перемещаться по шероховатой плоскости за счет изгибов в шарнирах между звеньями при наличии сухого трения между звеньями.

2. Тела, перемещающиеся в жидкости за счет колебаний одного или нескольких звеньев, присоединенных к телу.

3. Вибророботы, движение которых происходит в сопротивляющейся среде за счет относительных колебаний одной или нескольких внутренних масс.

Построены механико-математические модели этих систем. Рассмотрены различные способы управления движением и разные законы сопротивления внешней среды: линейный, квадратичный, а также силы сухого трения. При определенных предположениях получены соотношения для средней (за период колебательных движений) скорости перемещения системы как целого.

Поставлены и решены задачи об оптимальном выборе геометрических и механических параметров систем, а также об оптимальных законах управления, при которых достигается наибольшая средняя скорость перемещения.

Представлены результаты компьютерного моделирования и данные экспериментальных исследований, подтверждающие сделанные теоретические выводы.

Рассматриваемые системы представляют интерес с точки зрения биомеханики (моделирование движения змей, рыб, насекомых) и робототехники. Данные способы движения используются в ряде конструкций мобильных роботов, особенно мини-роботов, которые могут перемещаться без помощи колес или ног в трубах, по сложному рельефу, в агрессивных средах.

ОБЩИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ: ОБЗОР НАПРАВЛЕНИЙ ИССЛЕДОВАНИЯ

Л. Е. Шайхет
Кафедра высшей математики
Донецкий государственный университет управления
e-mail: leonid.shaikhet@usa.net

Многие результаты в теории устойчивости систем с последействием и ее приложениях были получены с помощью соответствующих функционалов Ляпунова. Длительное время построение каждого такого функционала было результатом изобретательности его автора. В [1] была предложена некая формальная процедура построения функционалов Ляпунова для стохастических функционально-дифференциальных уравнений, позволяющая строить различные функционалы Ляпунова для рассматриваемого дифференциального уравнения и в результате получать различные условия устойчивости решения этого уравнения.

Позднее предложенная процедура построения функционалов Ляпунова была адаптирована для разностных уравнений с дискретным временем, с непрерывным временем, для эволюционных уравнений с запаздыванием.

Разработанный таким образом общий метод построения функционалов Ляпунова позволяет получать различного типа условия устойчивости решений линейных и нелинейных стохастических систем с последействием, устанавливать условия на шаг дискретизации, при которых разностный аналог рассматриваемого дифференциального уравнения сохраняет его свойства устойчивости, исследовать на устойчивость известные математические модели в механике, биологии: модели типа "хищник-жертва", распространение эпидемий, перевернутый маятник, "муха Николсона" и др.

[1] **Kolmanovskii V. B.** New results in stability theory for stochastic functional-differential equations (SFDEs) and their applications / Kolmanovskii V. B., Shaikhet L. E. // Dynamic Publishers Inc. Proceedings of Dynamic Systems and Applications (Atlanta, 1993) – 1994. – V.1. – P. 167-171.

МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ ТРЕХУРОВНЕВЫХ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

А. А. Штанько, Г. А. Ефимова
Кафедра оптимального управления и экономической кибернетики
Институт математики, экономики и механики
Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова
e-mail:anna-shtanko@mail.ru

В настоящее время многие организации используют структурирование взаимоотношений субъектов системы. Нередко такие структуры оказываются многоуровневыми, однако использование промежуточных уровней и определенных механизмов стимулирования зачастую не обосновано. Субъекты системы обычно обладают собственными целями и возможностями, в соответствии с которыми формируется иерархия системы. А выбор метода стимулирования зависит не только от организационной структуры, но и от способов взаимодействия между объектами, а также их информированностью. В данной работе рассмотрено несколько способов стимулирования, на основании которых построена организационная система, имитирующая работу спортивной школы. Используя метод аппроксимации статистических данных, были построены функции затрат участников ОС. При моделировании данной организации учитываются определенные законы функционирования системы. Задача стимулирования формулируется следующим образом: найти допустимую систему стимулирования, которая максимизировала бы целевую функцию центра на множестве реализуемых действий промежуточных центров при заданных ограничениях на механизмы стимулирования. При этом действия субъектов второго уровня должны обеспечиваться некоторой комбинацией реализуемых действий элементов третьего уровня каждой из подсистем. Идея алгоритма, реализованного в среде MATLAB, заключается в том, что на основании возможностей каждого активного элемента, можно построить некоторую оптимальную модель действий подсистемы, функционирование которой требует определенных капиталовложений со стороны Центра. Центр же, имея в своем распоряжении некоторый капитал, решает задачу наилучшего его распределения между подсистемами.

Для активных элементов системы использовалась компенсаторная система стимулирования, а для промежуточных центров - скачкообразная. Проведя ряд экспериментов и построив графики прибыли организации при двухуровневой и трехуровневой системах, был сделан вывод о необходимости использования промежуточного уровня при наличии не менее трех активных элементов. В работе рассмотрены также различные варианты информированности субъектов.

[1] **Новиков Д. А.** Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем / Новиков Д. А. – Москва: Фонд «Проблемы управления», 1999. – 150 с.

[2] **Новиков Д. А.** Теория управления организационными системами / Новиков Д. А. – Москва: МПСИ, 2005. – 584 с.

ЛИНЕЙНО КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ВНЕИНТЕГРАЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТАНДАРТНОГО ВИДА С СИНГУЛЯРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Т. П. Яценко
Кафедра высшей математики и моделирования систем
Одесский Национальный Политехнический Университет
e-mail: tat.kuw@gmail.com

Рассматривается задача минимизации функционала

$$I = c^{'} x(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + d^{'} z(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon^{k} \int\limits_{0}^{\varepsilon^{-1}} u^{'}(t, \varepsilon) u(t, \varepsilon) dt, \qquad (1)$$

на траекториях системы

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = \varepsilon(a_{11}(t)x + a_{12}(t)z + b_1(t)u), & x(0, \varepsilon) = x^0, \\ \varepsilon \dot{z} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)z + b_2(t)u, & z(0, \varepsilon) = z^0, \end{array} \qquad (2)$$

где $c, x \in E^{n1}, d, z \in E^{n2}, u \in E^{r}$, $a_{ij}(t), b_i(t), i, j = 1, 2$ – матрицы соответствующих размерностей, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $'$ означает транспонирование, $k \in N$ – параметр.

При естественных предположениях относительно параметров задачи (1), (2) [1,2] изучается асимптотическое разложение её решения для некоторых значений параметра к [3].

[1] **Васильева А. Б.** Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления / Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. // Итоги науки. Математический анализ. – 1982. – Т. 20. – С. 3–78.

[2] **Плотников В. А.** Решение сингулярно возмущенной задачи управления на асимптотически большом промежутке времени / Плотников В. А.,Эфендиев В. В., Яценко Т. П. // Деп в УкрНИИНТИ 6.12.89, №2778, 15 с.

[3] **Яценко Т. П.** Асимптотическое исследование линейно-квадратичной задачи управления / Яценко Т. П. // Укр. математический журнал. – № 4, 1988. – С. 501–507.

Покажчик