

Міжнародна літня математична школа пам'яті В. О. Плотнікова проводиться в Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова з 2010 року.

До програми Міжнародної літньої математичної школи пам'яті В. О. Плотнікова включено доповіді за такими напрямками:

- асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь і оптимального керування;
- математичні методи оптимального керування;
- багатозначні рівняння і включення;
- якісна теорія в теорії диференціальних рівнянь і оптимального керування;
- математичне моделювання;
- теорія ігор

Програмний комітет

Співголови:

Україна : А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, А. А. Мартинюк

Росія : Ф. Л. Черноусько

Болгарія : Ю. Ревалскі, П. Кендеров

Члени програмного комітету:

Україна: О. А. Бойчук, О. Н. Вітюк, Ф. Г. Гаращенко, В. М. Євтухов, В. О. Капустян, В. І. Коробов, Л. Д. Лещенко, О. Г. Наконечний, Р. І. Петришин, В. В. Пічкур, А. В. Плотніков, В. Г. Самойленко, О. М. Станжицький, Ю. В. Теплінський, Д. Я. Хусаїнов, І. М. Черевко, А. О. Чикрій

Росія: Л. Д. Акуленко, І. М. Ананьєвський, А. Б. Васильєва, М. Г. Дмитрієв, В. І. Жуковський

Білорусь: А. Й. Калінін

Грузія: І. Т. Кігурадзе

Болгарія: А. Дончев, Л. Каранджулов

Турція: А. Аширалієв

Організаційний комітет:

В. Є. Круглов (голова),

О. Д. Кічмаренко (заступник голови),

А. Л. Рачинська, А. Т. Яровий, Г. О. Єфімова, Н. В. Скрипник,

А. В. Арсірій, О. Б. Васильєв, Є. М. Страхов, О. П. Огуленко,

О. К. Осадчий, Є. В. Платонова

Секретаріат:

Г. В. Мосійчук, А. В. Гоцульська

Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова проводится в Одесском национальном университете имени И. И. Мечникова с 2010 года.

В программу Международной летней математической школы памяти В. А. Плотникова включены доклады по следующим направлениям:

- асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления;
- математические методы оптимального управления;
- многозначные уравнения и включения;
- качественная теория в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления;
- математическое моделирование;
- теория игр

Программный комитет

Сопредседатели:

Украина : А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, А. А. Мартынюк

Россия : Ф. Л. Черноусько

Болгария : Ю. Ревалски, П. Кендеров

Члены программного комитета:

Украина: А. А. Бойчук, А. Н. Витюк, Ф. Г. Гаращенко, В. М. Евтухов, В. Е. Капустян, В. И. Коробов, Л. Д. Лещенко, А. Г. Наконечный, Р. И. Петришин, В. В. Пичкур, А. В. Плотников, В. Г. Самойленко, А. Н. Станжицкий, Ю. В. Теплинский, Д. Я. Хусаинов, И. М. Черевко, А. А. Чикрий

Россия: Л. Д. Акуленко, И. М. Ананьевский, А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев, В. И. Жуковский

Беларусь: А. И. Калинин

Грузия: И. Т. Кигурадзе

Болгария: А. Дончев, Л. Каранджулов

Турция: А. Аширалиев

Организационный комитет:

В. Е. Круглов (председатель),

О. Д. Кичмаренко (заместитель председателя),

А. Л. Рачинская, А. Т. Яровой, Г. А. Ефимова, Н. В. Скрипник,

А. В. Арсирый, А. Б. Васильев, Е. М. Страхов, А. П. Огуленко,

А. К. Осадчий, Е. В. Платонова

Секретариат:

А. В. Мосийчук, А. В. Гоцульская

International summer mathematical school in memoriam V. A. Plotnikov is being held at the Odessa I. I. Mechnikov National University since 2010.

The program of the International summer mathematical school in memoriam V. A. Plotnikov included reports on the following scientific subjects:

- asymptotic methods in the theory of differential equations and optimal control;
- mathematical methods of optimal control;
- multivalued equations and inclusion;
- qualitative theory in the theory of differential equations and optimal control;
- mathematical modeling;
- game theory

Program committee

Co-chairmen:

Ukraine : A. M. Samoylenko, N. A. Perestyuk, A. A. Martynyuk

Russia : F. L. Chernousko

Bulgaria : Yu. Revalsky, P. Kenderov

Committee members:

Ukraine: O. A. Boychuk, O. N. Vityuk, F. G. Garaschenko,
V. M. Evtuhov, V. O. Kapustyan, V. I. Korobov, L. D. Leschenko, O. G. Nakonechniy,

R. I. Petrishin, V. V. Pichkur, A. V. Plotnikov,
V. G. Samoylenko, O. M. Stangitsky, Yu.V. Teplinsky,
D.Ya. Khusainov, I. M. Cherevko, A. O. Chikriy

Russia: L. D. Akulenko, I. M. Ananyevskiy, A. B. Vasilyeva, M. G. Dmitriev,
V. I. Zhukovskiy.

Belarus: A. I. Kalinin

Georgia: I. T. Kiguradze

Bulgaria: A. Donchev, L. Karandjulov

Turkey: A. Ashiraliev

Organizing committee:

V. Ye. Kruglov (chairman);

O. D. Kichmarenko (vice-chairman);

A. L. Rachinskaya, A. T. Yarovoy, G. O. Efimova, N. V. Skrypnik,

A. V. Arsirii, O. B. Vasilyev, Ye. M. Strakhov, O. P. Ogulenko

O. K. Osadchii, Ye. V. Platonova

Secretariat:

A. V. Mosiychuk, A. V. Gotsulskaya



ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВИЧ ПЛОТНИКОВ

Виктор Александрович Плотников — известный математик, основатель научной школы по теории асимптотических методов исследования дифференциальных уравнений с многозначной правой частью.

Виктор Александрович родился 5 января 1938 г. в городе Ленинграде в семье рабочих, во время Великой Отечественной войны был жителем блокадного Ленинграда, затем семья переехала в г. Одессу. Природа щедро одарила Виктора Александровича светлым умом, добрым сердцем, тонкой интуицией, чувством справедливости, любовью к людям.

Среднее образование Виктор Александрович получил в Одессе. В 1955 г. В. А. Плотников поступил в Одесский государственный университет имени И. И. Мечникова. В то время на физико-математическом факультете университета доцент С. Н. Киро создал группу студентов, факультативно специализирующуюся в области вычислительной математики, в состав которой входили В. А. Плотников, П. Д. Варбанец, В. П. Марченко, В. А. Андриенко и др. После основных обязательных занятий для этой группы читались лекции по дополнительным главам численных методов, программированию на ЭВМ, решению задач на аналоговых вычислительных машинах. Эти студенты проходили практику в вычислительных центрах МГУ и АН СССР (Москва), Института кибернетики АН УССР (Киев).

В 1959 г. была создана лаборатория вычислительной математики. В лаборатории была установлена первая в Одессе аналоговая вычислительная машина (АВМ) МПТ-9, которая позволяла решать системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами.



Лаборатория вычислительной математики.

В. А. Плотников третий слева

Затем была дополнительно установлена АВМ МН-7 (модель нелинейная), которая позволяла решать системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений до седьмого порядка с некоторыми простыми нелинейностями. Для освоения опыта работы на машинах данного типа в 1959—1960 уч. году В. А. Андриенко и В. А. Плотников прошли производственную практику в Институте прикладной механики МГУ. В это же время началось научное сотрудничество лаборатории с кафедрой “Теория механизмов и деталей машин” Одесского института инженеров морского флота, которую возглавлял известный ученый профессор В. И. Небеснов. Возможности появившейся вычислительной техники открыли перспективы исследования совершенно новых задач в динамике судовых комплексов. Для решения этих задач на установленной в университете в 1962 г. цифровой вычислительной машине (ЦВМ) Урал-2 потребовалась разработка новых математических методов. В этом же году в Одесском университете несколько лекций прочитал заведующий отделом ВЦ АН СССР академик Н. Н. Моисеев. Его группа занималась проблемой оптимальных траекторий ракет с целью доставки ядерного оружия и запуска спутников. Дипломная работа В. А. Плотникова “Оптимизация траекторий многоступенчатых ракет”, написанная под руководством проф. В. Ф. Котова, укладывалась в данную тематику и в 1963—1964 гг. В. А. Плотников прошел годичную стажировку в отделе Н. Н. Моисеева. Во время стажировки В. А. Плотников посещал семинары академика Н. Н. Моисеева в ВЦ АН СССР, лекции академика Л. С. Понтрягина в Институте математики АН СССР, лекции на механико-математическом факультете МГУ. Эта стажировка определила дальнейшие научные интересы Виктора Александровича в области оптимального управления и асимптотических методов. Уже в 1965 г. В. А. Плотников выступает с докладом “Решение одной задачи оптимального управления методом Беллмана” на конференции по оптимальному математическому программированию в Академгородке Новосибирска. В этом же году на конференции, посвященной 100-летию Одесского университета, состоялся совместный доклад В. И. Небеснова и В. А. Плотникова на тему “Оптимальное управление главным двигателем при волнении”.

Используемые Н. Н. Моисеевым при исследовании оптимальных траекторий ракет асимптотические методы можно было применять к исследованию сложных систем, содержащих существенно различные по массе элементы, то есть к исследованию судовых комплексов. В связи с этим в последующие годы усиливаются взаимные научные связи Виктора Александровича с кафедрой проф. В. И. Небеснова и расширяется круг исследуемых задач оптимального управления.

В 1969 г. В. А. Плотников защитил в Одесском университете кандидатскую диссертацию “Исследование одного класса задач оптимального управления системами с двумя степенями свободы”. Научным руководителем диссертации был проф. В. И. Небеснов. Диссертация была посвящена численно-асимптотическим методам решения задач оптимального управления.



Защита кандидатской диссертации, 1969 год

В 1972 г. В. А. Плотников становится заведующим кафедрой вычислительной математики и в составе кафедры создается секция, занимающаяся разработкой асимптотических методов в задачах оптимального управления и их применением к исследованию динамики и оптимального управления механическими системами. В это же время создается студенческая группа, специализирующаяся в области оптимального управления. Результаты научной работы данной группы докладываются практически на

всех всесоюзных конференциях по оптимальному управлению и публикуются в научных журналах.

В 1974 г. на основе секции экстремальных задач кафедры вычислительной математики была организована кафедра оптимального управления (с 1996 г. — кафедра оптимального управления и экономической кибернетики). Виктор Александрович заведовал кафедрой до последних минут своей жизни. В 1974 г. на базе Одесского университета прошла III Всесоюзная конференция по теории игр. Председателем оргкомитета конференции был Н. Н. Моисеев. Основную организационную работу по проведению конференции в университете выполняла только что созданная кафедра оптимального управления. В работе конференции приняли участие многие известные ученые в области теории игр и оптимального управления, в том числе Н. Н. Красовский, Н. Н. Воробьев, Б. Н. Пшеничный, Ю. Б. Гермейер, М. С. Никольский.

В 1980 г. В. А. Плотников защитил в Ленинградском университете докторскую диссертацию на тему “Асимптотические методы в задачах оптимального управления” (научный консультант проф. В. И. Небеснов, оппоненты академик Н. Н. Моисеев, проф. А. А. Первозванский, проф. В. С. Новоселов).

С 1982 г. В. А. Плотников — профессор кафедры оптимального управления. В 1987—1988 уч. году — декан механико-математического факультета. С 1986 г. — председатель специализированного ученого совета по защите кандидатских диссертаций по математике при Одесском университете. В 1997 г. получил звание Соросовского профессора.

В. А. Плотников основал научную школу по теории асимптотических методов исследования дифференциальных уравнений с многозначной и разрывной правой частью. Виктором Александровичем и его учениками было получено обоснование теорем Н. Н. Боголюбова и А. Н. Тихонова для дифференциальных включений, обосновано построение асимптотического решения задачи Коши и краевой задачи для систем дифференциальных уравнений, содержащих сингулярные возмущения, запаздывание, импульсные воздействия на конечном и бесконечном промежутках, доказаны теоремы существования и единственности решений квазидифференциальных уравнений в локально-компактных и пол-

ных метрических пространствах, обоснован метод усреднения для квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах, разработан алгоритмы численных и численно-асимптотических методов решения задач оптимального управления. Разработка этих вопросов имеет значение не только как обобщение теории дифференциальных уравнений, но и благодаря многочисленным приложениям к исследованию задач оптимального управления, теории игр, экономики.



На конференции в Тернополе, 1989 г.

Результаты в данном направлении положили начало математическим исследованиям асимптотических методов в теории дифференциальных включений в России, Белоруси, Болгарии, Польше, Франции, США. Эти результаты докладывались на многочисленных международных, всесоюзных и республиканских конференциях. В. А. Плотников опубликовал более 250 научных и научно-методических работ, в т.ч. 6 монографий.

Математический талант ученого сочетался с педагогической деятельностью Виктора Александровича. Он блистательно читал лекции, много сил отдал работе со своими учениками. Виктор Александрович подготовил 21 кандидата наук из Украины, Алжира, Болгарии, Вьетнама, Иордании.

В своей научной деятельности Виктор Александрович сотрудничал с представителями различных математических школ: Института математики АН СССР, кафедры оптимального управления МГУ, кафедры вычислительной математики физического факультета МГУ, Института математики Белорусской АН, Санкт-Петербургского университета, а также Свердловской, Иркутской, Новосибирской, Киевской, Харьковской, Черновицкой и Болгар-

ской научных математических школ. Его научные результаты широко известны не только в Украине и странах бывшего Советского Союза, но и за рубежом.

Лекции Виктора Александровича Плотникова слушали не только в Украине, но и в Болгарии, Польше.



Международная конференция в Болгарии, 1996 г.

В. А. Плотников был членом редакционных коллегий в журналах “Вестник Одесского государственного университета”, “Нелинейные колебания”; рецензировал статьи во многих отечественных и зарубежных журналах.

4 сентября 2006 г. Виктора Александровича не стало. Всю свою жизнь он посвятил математике, он ежедневно и до последнего вздоха занимался научной работой.

Открытость, искренность, преданность делу всегда выделяли Виктора Александровича. В нашей памяти Виктор Александрович останется как талантливый ученый и замечательный учитель, который любил жизнь во всех ее проявлениях.

DYNAMIC PROGRAMMING APPROACH
FOR A STRUCTURAL AND PARAMETRIC OPTIMIZATION
OF DISCRETE SYSTEMS WITH A FUNCTIONAL
DEPENDENT ON A STARTING MOMENT

A.V. ANELCHYK, YE.M. STRAKHOV

Department of Optimal Control and Economic Cybernetics

Odessa I. I. Mechnikov National University

e-mail: nastyanelchyk@gmail.com, strakhov.e.m@onu.edu.ua

Let us consider a linear discrete control system

$$\begin{aligned} x(k) &= f_{k+1}(x(k+1), u(k+1)), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \\ x(N) &= x_N \end{aligned} \quad (1)$$

with a control function given in a structural and parametric form

$$u(k+1) = \Psi_{k+1}(b_{k+1}, x(k+1)), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

and performance criteria

$$J(x, u) = \sum_{k=1}^N g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(0)) \rightarrow \min. \quad (3)$$

Here $x(k) \in X_k$ is a state vector of dimension n ; $f_{k+1} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$; $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ are given continuous functions; $\Psi_{k+1} : \mathbb{R}^{i_k} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — given vector-valued functions of numerical parameters $b_k \in R_k \subset \mathbb{R}^{i_k}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

The goal of a structural and parametric optimization of the system (1)–(3) is to find unknown parameters of the functions (2) and corresponding trajectory of the system (1) in order to minimize the criteria (3).

This paper deals with a substantiation of a dynamic programming approach to the problem (1)–(3). We prove Bellman's optimality principle, obtain Bellman's difference equation and establish sufficient optimality condition.

1. **Bublik B.N.** Structural and parametric optimization and stability of beam dynamics / B.N. Bublik, F.G. Garashchenko, N.F. Kirichenko. – Kiev: Naukova Dumka, 1985. – 304 p. (In Russian)

ON LIÉNARD POLYNOMIAL SYSTEMS

V.A. GAIKO

United Institute of Informatics Problems

National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: valery.gaiko@gmail.com

We continue studying Liénard polynomial systems

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x(1 + a_1 x + \dots + a_{2l} x^{2l}) + y(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{2k} x^{2k}). \quad (1)$$

Generalizing our results on systems (1) [1, 2] and applying canonical systems with field rotation parameters [3], we study limit cycle bifurcations of (1) and prove the following theorem [3].

Theorem. *The general Liénard polynomial system (1) can have at most $k + l + 1$ limit cycles, $k + 1$ surrounding the origin and l surrounding one by one the other singularities of (1).*

1. **Gaiko, V. A.** The applied geometry of a general Liénard polynomial system / V. A. Gaiko // Appl. Math. Letters. – 2012. – Vol. 25, No. 12. – P. 2327–2331.
2. **Gaiko, V. A.** Limit cycle bifurcations of a general Liénard system with polynomial restoring and damping functions / V. A. Gaiko // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. – 2012. – Vol. 4, No. 3. – P. 242–254.
3. **Gaiko, V. A.** Maximum number and distribution of limit cycles in the general Liénard polynomial system / V. A. Gaiko // Adv. Dyn. Syst. Appl. – 2015. – Vol. 10, No. 2. – P. 177–188.

UAV MOTION MODELS AND THEIR ANALYSIS

V. KHARCHENKO, N. GLAZUNOV

Institute of aero navigation

National Aviation University, Kiev

e-mail: glanm@yahoo.com

One of important aspects of the conflict-controlled processes [2] is the aspect of conflict avoidance. Aircrafts and airspace safety for moving bodies in airspace or on a surface in the airspace has long been a key issue for many areas. The best way to avoid collision is to predict unmanned aerial vehicle (UAV) future motion and estimate the position of the UAV in advance.

In the communication UAV motion models in/on a terminal set are considered. Here, in our considerations we will explore models with two UAVs. Along with the classical approaches we will present models based on dual numbers [1] and also screw motions. Under these models we present methods and algorithms of collision avoidance. The main object of the methods and algorithms is to predict UAVs' trajectories from the current state and compute the predicted minimum distance (PMD) and predicted time to minimum distance in order to determine when a collision may occur. We inscribe UAVs in spheres of radii R_1 and R_2 and preset threshold $\Delta > R_1 + R_2$. A collision detection method determines whether the PMD is below Δ .

The results demonstrated that the models, methods and algorithms can help control systems of UAVs to avoid collision.

1. **Kryvonos Yu.** Differential-algebraic equations and dynamical systems on manifolds [text] / Yu. Kryvonos, V. Kharchenko, N. Glazunov // Cybernetics and System Analysis. – 2016. – 3. – P. 83–96.
2. **Chikrii A.** Conflict-controlled processes [text] / A. Chikrii. – New York: Springer Science & Business Media, 2013. – 383 p.

METHOD OF AVERAGING FOR OPTIMAL CONTROL
PROBLEMS WITH IMPULSIVE EFFECTS

N.M. KITANOV

Bulgarian Academy of Sciences

e-mail: nkitanov@abv.bg

In this paper are presented some results connected to the applications of the averaging method for solving of impulsive optimal control problems, in the case, when we do not can use support functions. The models are systems of differential equations with impulsive effects. We suppose additional control in the impulses. Two schemes for averaging are presented.

In the domain $Q = \{t \geq 0, x \in D \subset R^n, u \in U \subset R^m, w_i \in W \subset R^{m_i}\}$ we consider the following optimal control problem:

$$\dot{x} = \varepsilon[f(t, x) + A(x)\varphi(t, u)], \quad t \neq t_i, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = \varepsilon I_i(x, w_i), \quad (2)$$

$$J[u, w_i] = \Phi(x(T)) \rightarrow \min, \quad (3)$$

where x is n -dimensional phase vector; $\varepsilon > 0$ is a small parameter; $f(t, x)$ and $\varphi(t, n)$ are 2π -periodical functions with respect to $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ ($L = \text{const}$); $A(x)$ is $n \times m$ matrix; $u \in U \in \text{comp}(R^m)$ is the control; Δx is the jump of the solution of the system at the given moments $t = t_i$; $I_i(x, w_i)$ are the functions giving the values of the jumps (impulses) ($i = 1, 2, \dots, k$); $w_i \in W \in \text{comp}(R^{m_i})$ is the control by impulses, $\text{comp}(R^m)$ ($\text{comp}(R^{m_i})$) is the space of compact subsets of R^m (R^{m_i}).

Everywhere below we suppose that all functions are uniformly bounded, measurable with respect to t and Lipschitz continuous w. r. to x and w. r. to u .

AVERAGING METHOD FOR IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATION WITH SUPREMUM

O. KICHMARENKO, K. SAPOZHNIKOVA

Department of Optimal Control and Economical Cybernetics

I. I. Mechnikov Odesa National University

e-mail: Olga.Kichmarenko@gmail.com,

Kateryna.Sapozhnikova@gmail.com

We consider impulsive system with supremum.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varepsilon f(t, x(t), \sup_{\xi \in [g(t), \gamma(t)]} x(\xi)), \quad t \geq 0, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x|_{t=\tau_k} &= \varepsilon I_k(x), \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [\inf_{t \geq 0} \{g(t)\}, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is a phase vector, $f \in C([0, L\varepsilon^{-1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$; $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, $g, \gamma \in C([0, L\varepsilon^{-1}]; \mathbb{R})$, $g(t) \leq \gamma(t) \leq t$; $\varphi \in C([\inf_{t \geq 0} \{g(t)\}, 0; \mathbb{R}^n)$, $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ is a sequence of fixed numbers.

We associate the following averaged system with system (1):

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \varepsilon \left(\bar{f}(y(t), \sup_{\xi \in [g(t), \gamma(t)]} y(\xi)) + \bar{I}(y) \right), \quad t \geq 0, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [\inf_{t \geq 0} \{g(t)\}, 0]. \end{aligned} \quad (2)$$

Here

$$\bar{f}(x, z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, z) dt, \quad \bar{I}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{0 < \tau_k < L\varepsilon^{-1}} I_k(x).$$

The conditions of proximity of the solution for systems (1) to the solution for (2) are established.

1. **Bainov D.**, Impulsive differential equations with a small parameter / D.Bainov, V.Covachev. – World Scientific &, 1994.—280 p.
2. **Plotnikov V.A.**, A note on the averaging method for differential equation with maxima / V.A.Plotnikov, O.D. Kichmarenko // Iranian Journal of optimization. – 2009. – V.1, Is.2. – P. 132–140.

STRUCTURAL AND PARAMETRIC OPTIMIZATION
PROBLEM WITH BANG-BANG CONTROL FUNCTION AND
ITS APPLICATION IN A HEATING SYSTEM

N.M. KOLOMIICHUK, YE.M. STRAKHOV

Department of Optimal Control and Economic Cybernetics

Odessa I. I. Mechnikov National University

e-mail: natadancer1@rambler.ru, strakhov.e.m@onu.edu.ua

Let us consider a linear control system

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(\cdot), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

with a control function given in a structural and parametric form

$$u(\cdot) = \psi_i(t, b_i), \quad t \in [t_i; t_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2)$$

Here $t \in [t_0; T]$ is the time variable, $x(t)$ — a state vector of dimension n , $A(t)$ and $C(t)$ — matrices with absolutely continuous elements, $\psi_i(t, b_i)$ are given continuous vector-valued functions of dimension m , $b_i \in [\alpha_i; \beta_i]$ — numerical parameters, $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$ — switching points which can be fixed or unknown.

The goal of a structural and parametric optimization is to find parameters and switching points of the control function (2) and corresponding trajectory of the system (1) such that minimize the criteria

$$J(u) = \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(\cdot), t) dt + \Phi(x(T)). \quad (3)$$

A numerical algorithm of parametric optimization for the system (1) in case of bang-bang control function $u(\cdot) = b_i$, $t \in [t_i; t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ and fixed switching points was substantiated in [1]. In this paper we design an algorithm for calculating the unknown switching points of an intermittent heating system with bang-bang control function.

1. **Strakhov Ye.M.** Structural and parametric optimization in linear systems with fixed structure / Ye.M. Strakhov , N.M. Stavytska // Abstracts of PDMU, Odessa, Ukraine. – 2015. – P. 143 (In Ukrainian)

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ
ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИЕ К СЛУЧАЮ ЛАГРАНЖА,
ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО
ДИССИПАТИВНОГО МОМЕНТА СИЛ

Л.Д. АКУЛЕНКО¹, Я.С. ЗИНКЕВИЧ², Т.А. КОЗАЧЕНКО²,
Д.Д. ЛЕЩЕНКО²

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

²Одесская государственная академия строительства

и архитектуры

e-mail: leshchenko_d@ukr.net

Проблема эволюции вращений твердого тела относительно неподвижной точки продолжает привлекать внимание исследователей. Анализ вращательных движений тел относительно неподвижной точки важен для решения задач входа летательных аппаратов в атмосферу, космонавтики, гироскопии, динамики вращающегося снаряда. При этом во многих случаях в качестве порождающего решения может рассматриваться движение в случае Лагранжа.

В работе исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием момента сил, медленно изменяющегося во времени. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, выполнена процедура усреднения уравнений для медленных переменных. Полученная усредненная система уравнений первого приближения значительно проще исходной, так как она имеет меньший порядок (третий вместо шестого) и не содержит быстрых осцилляций.

В качестве примера рассмотрена механическая модель возмущений, отвечающая движению тела в среде с линейной диссипацией. Усредненная система проинтегрирована численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. Показано, что под действием внешней диссипации твердое тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия.

ПРО ЧИСЛОВИЙ МЕТОД ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЇ ЧУТЛИВОСТІ В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

О.М. Башняков, В.В. Пичкур, О.А. Поліщук

Кафедра моделювання складних систем

Лабораторія моделювання та оптимізації

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

e-mail: alexanderbashnyakov@gmail.com, vpichkur@gmail.com,

zagamuf@gmail.com

В доповіді розглядається задача оптимального керування нелінійною системою, що описується у формі системи звичайних диференціальних рівнянь з фіксованим лівим кінцем на фіксованому інтервалі. Критерій якості записується як квадратичне відхилення траєкторії системи керування від заданого режиму в класі інтегрованих з квадратом функцій. Задача полягає у мінімізації такого функціоналу за рахунок належного вибору керування.

Ми пропонуємо розглядати керування в класі кусково постійних функцій. Для цього на інтервалі функціонування системи вводиться сітка. Ми вважаємо, що значення функції керування між сусідніми вузлами є постійним. Ідея методу полягає в тому, що ми збудуємо функцію керування на кожному інтервалі розбиття і по кожному збуренню виділяємо квадратичну частину критерію якості з її подальшою мінімізацією. Для цього ми записуємо рівняння для матриці чутливості за кожним збуренням. Розв'язуючи подальшу задачу квадратичної оптимізації, для знаходження збурення ми одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Це дозволяє нам побудувати ітераційний метод знаходження оптимального керування. Він полягає у тому, що на кожному проміжку розбиття ми здійснюємо спуск за допомогою відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Така система будується виходячи із значення траєкторії системи керування та системи матриць чутливості, які відповідають інтервалам розбиття і поточному керуванню.

За своїм підходом даний метод використовує ідеї побудови методів оптимізації другого порядку. Ми застосовуємо такий підхід до задачі визначення збурень на кутові швидкості літального апарату за умови, що відомий вектор спостережень за його орієнтацією.

ПОВНЕ РОЗЩЕПЛЕННЯ ЗЛІЧЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З КОЛИВНИМИ
КОЕФІЦІЄНТАМИ В ОДНОМУ КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

В.В. ДЖАШИТОВА

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

e-mail: vera1685@yandex.ua

Нехай $G = \{(t, \varepsilon) : t \in \mathbf{R}, \varepsilon \in (0; \varepsilon_0], \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\}$.

Означення 1. Скажемо, що функція $p(t, \varepsilon)$ належить класу $S(m; \varepsilon_0)$ ($m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), якщо виконано наступні умови:

- 1) $p: G \rightarrow \mathbf{C}$, 2) $p(t, \varepsilon) \in C^m(G)$ по t ,
- 3) $d^k p(t, \varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p^*(t, \varepsilon)$, $\sup_G |p^*(t, \varepsilon)| < +\infty$ ($k \in \overline{0, m}$).

Означення 2. Скажемо, що функція $f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$ належить класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ ($m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), якщо ця функція зображується у вигляді:

$$f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(t, \varepsilon) e^{in\theta(t, \varepsilon)},$$

причому виконано умови

- 1) $f_n(t, \varepsilon) \in S(m; \varepsilon_0)$, $d^k f_n(t, \varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_{nk}(t, \varepsilon)$, ($n \in \mathbf{Z}$, $k \in \overline{0, m}$),
- 2) $\sum_{k=0}^m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sup_G |f_{nk}(t, \varepsilon)| < +\infty$,
- 3) $\theta(t, \varepsilon) = \int_0^t \varphi(\tau, \varepsilon) d\tau$, $\varphi(t, \varepsilon) \in S(m; \varepsilon_0)$, $\inf_G \varphi(t, \varepsilon) > 0$.

Розглядається наступна система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j(t, \varepsilon)x_j + \mu \sum_{k=1}^{+\infty} b_{jk}(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))x_k, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де 1) $\lambda_j(t, \varepsilon) \in S(m; \varepsilon_0)$ и $|\lambda_j(t, \varepsilon) - \lambda_k(t, \varepsilon) - in\varphi(t, \varepsilon)| \geq \gamma > 0$
 $\forall n \in \mathbf{Z}$, $j \neq k$, 2) $b_{jk} \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$ ($m \geq 1$), $\mu \in]0, 1[$.

Для системи (1) отримано умови існування перетворення вигляду

$$x_j = y_j + \sum_{k=1}^{+\infty} q_{jk}(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon), \mu)y_k, \quad j = \overline{1, n},$$

де $q_{jk} \in F(m-1; \varepsilon_1(\mu); \theta)$, яке зводить систему (1) до чисто діагонального вигляду в одному критичному випадку.

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К КЛАССИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ АНАЛИЗА И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Д.В. Дмитришин, А.М. Стоколос

Кафедра прикладной математики

Одесский национальный политехнический университет

e-mail: dmitry1966@i.ua

Многочисленные задачи естествознания сводятся к исследованию неподвижных точек или T -циклов различных отображений. Для кусочно-гладкой функции $f : R^m \rightarrow R^m$ рассматривается задача поиска циклических точек: $\eta_{j+1} = f(\eta_j)$, $j = 1, \dots, T$; $\eta_{1+T} = \eta_1$; $\eta_i \neq \eta_j$ при $i \neq j$. Если $T = 1$, то $\eta_1 = f(\eta_1)$ — неподвижная точка отображения f . Требуется построить систему вида

$$x_{n+1} = (1 - \gamma) f \left(\sum_{j=1}^{N_1} a_j x_{n-jT+T} \right) + \gamma \sum_{j=1}^{N_2} b_j x_{n-jT+1},$$

$$\sum_{j=1}^{N_1} a_j = 1, \sum_{j=1}^{N_2} b_j = 1, \gamma \in (0, 1),$$

так, чтобы T -цикл был бы локально асимптотически устойчив. При этом коэффициенты γ , $a_1, \dots, a_{N_1}$ и $b_1, \dots, b_{N_2}$ не должны зависеть от функции f .

Для решения задачи необходимо знать оценку области M локализации мультипликаторов цикла (но не обязательно сами мультипликаторы).

Теорема. Пусть $\bar{D} = \{z \in C : |z| \leq 1\}$, $z = \frac{1}{\bar{z}}$, и все мультипликаторы T -цикла $\mu_j \in M$. И пусть

$$F_T(z) = (1 - \gamma)^T \frac{z \left(\sum_{j=1}^{N_1} a_j z^{j-1} \right)^T}{\left(1 - \gamma z \sum_{j=1}^{N_2} b_j z^{j-1} \right)^T}.$$

Тогда для локальной асимптотической устойчивости T -цикла необходимо и достаточно, чтобы $M \subseteq (\bar{C}F_T(\bar{D}))^*$.

Критерий позволяет установить связь между проблемой устойчивости циклов в нелинейных дискретных системах и задачами геометрической теории функции комплексного переменного. В частности, перенесены некоторые классические результаты школы Бибербаха из класса однолистных функций в круге и выпуклых функций на класс полиномов и дробно-полиномиальных функций. Такой подход определения T -циклов может быть использован в задачах управления хаосом, возникающих в различных областях науки: физики, биологии, социологии, экономики, экологии и т. п. В перспективе планируется распространить этот подход к определению стационарных режимов в различных моделях механики сплошных сред, подавлению турбулентных режимов и т. п.

МАТАН ЗОЛОТОГО ПРАВИЛА
В.И. ЖУКОВСКИЙ
Кафедра оптимального управления
Факультет вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Формулировка Золотого правила нравственности (ЗПН): «Поступай по отношению к другому так, как ты хочешь, чтобы он поступил по отношению к тебе». Оно является одним из самых древних, распространенных и специфичных нравственных требований и акцентируется в христианстве, исламе, иудаизме, буддизме и конфуцианстве. В России теоретические исследования ЗПН возглавляет академик А.А. Гусейнов [1]. ЗПН естественно использовать при тушении, уравнивании конфликтов, а его «альтруистический характер» при этом заведомо исключает войны, кровопролития, вооруженные столкновения.

Мы предлагаем в качестве математической модели ЗПН использовать концепцию равновесия по Бержу (BE — Berge equilibrium). BE появилось в России в 1995 году при критическом обсуждении книги Клода Бержа [4], отсюда и название «Равновесие по Бержу». В 1995 году К. С. Вайсман (тогда аспирант В. И. Жуковского) в Санкт-Петербургском университете на факультете ПМиПУ защитил кандидатскую диссертацию «Равновесие по Бержу». В дальнейшем это понятие получило широкое распространение у наших иностранных коллег. Количество публикаций монотонно растет из года в год [5]. Предлагаемая нами теория BE делится на статический и динамический варианты.

Статический вариант. Для бескоалиционной игры N лиц в нормальной форме

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

где $\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$; чистые стратегии i -ого игрока $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$; ситуация $x = (x_1, \dots, x_N) \in X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$; $f_i(x)$ — функция выигрыша i -ого игрока; $(x||z_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \dots, x_N) \in X$.

Ситуация $x^B \in X$ равновесна по Бержу в Γ , если

$$f_i(x||x_i^B) \leq f_i(x^B) \quad \forall x \in X, i \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Так как X^B — множество ВЕ внутренне не устойчиво (могут $\exists x^{(1)}, x^{(2)} \in X^B : f_i(x^{(1)}) > f_i(x^{(2)})$ ($\forall i \in \mathbb{N}$)), то формализуем SBE — слабо эффективное ВЕ, добавляя к требованию (1) слабую эффективность (максимальность по Слейтеру) по отношению к остальным ситуациям из X^B , множества ситуаций, из X^B , «нагруженных» дополнительно требованием слабой эффективности, обозначим X^{SB} . Свойства X^{SB} :

- 1) $X^{SB} \in \text{comp}X$ (хотя может быть $X^{SB} = \emptyset$), если $X_i \in \text{comp}\mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i(\cdot) \in C(X)$ ($i \in \mathbb{N}$) [1];
- 2) достаточные условия: $\exists x^{SB}$ сводится к $\exists$ седловой точки специальной гермейеровской свертки функции выигрыша [2];
- 3) SBE в Γ существует в смешанных стратегиях, если $X_i \in \text{comp}\mathbb{R}^{n_i}$, $f_i(\cdot) \in C(X)$ ($i \in \mathbb{N}$) (аналог теоремы Гликсберга для равновесия по Нэшу) [2];
- 4) аналогичные результаты получены в [6] для игры Γ при учете неопределенностей $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$, т.е. для

$$\Gamma_U = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle;$$

- 5) в моделях олигополии Курно и Бертрана выделены случаи, когда применение ВЕ доставляет всем игрокам большие выигрыши, чем NE [1].

Динамический вариант. Основой исследования здесь явились три фактора: а) модернизация математической формализации по Н.Н. Красовскому дифференциальной позиционной игры (ДПИ) в связи с контрпримерами А.И. Субботина и А.Ф. Кононенко [7], б) предложенный Н.Н. Красовским метод «управления с поводырем», в) гермейеровская свертка функций выигрыша игроков.

Результаты:

- 1) выделен класс дифференциальных игр с «разделенной динамикой», в котором существуют ВЕ [8];
- 2) для ряда линейно-квадратичных ДПИ построены коэффициенты условия существования ВЕ;

3) для многошаговых моделей дуополии Курно и Бертрана с помощью модификации метода динамического программирования найдены ВЕ.

В настоящее время организуется коллектив из представителей России, Франции, Украины и Алжира для совместных теоретических исследований ВЕ.

1. **Гусейнов А.А.** Математические основы Золотого правила нравственности: Теория нового альтруистического уравнивания конфликтов в противоположность «эгоистическому» равновесию по Нэшу / Гусейнов А.А., Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. – М.: URSS, 2016.
2. **Жуковский В.И.** Математические основы Золотого правила нравственности. I. Статический вариант / Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. // Математическая теория игр и приложения. – 2015. – № 3. – С. 16-47.
3. **Жуковский В.И.** Математические основы Золотого правила нравственности. II. Динамический вариант / Жуковский В.И., Смирнова Л.В., Горбатов А.С. // Математическая теория игр и приложения. – 2016. – № 1. – С. 27-62.
4. **Berge C.** Théorie générale des jeux a n-personnes. / Berge C. – Paris : Gauthier Villars, 1957.
5. **Larbani M.** Berge-Equilibrium in Normal Form Games: a literature review / Larbani M., Zhukovskiy V.I. // International Game theory review. (in press, 43p.)
6. **Zhukovskiy V.I.** Existence of Berge Equilibrium in Conflicts under Uncertainty / Zhukovskiy V.I., Chikrii A.A., Soldatova N.G. // Automation and Remote Control. – 2016. – № 4. – С. 607-622.
7. **Zhukovskiy V.I.** The Vector-Valued Maximum. / Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. – N.Y.: Academic Press, 1994.
8. **Zhukovskiy V.I.** Mathematical Model of Golden Rule in the Form Differential Positional Game of many Persons / Zhukovskiy V.I., Topchishvili A.L. // Model Assisted Statistics and Application. (in press, 30p.)

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

Кафедра методов оптимального управления

Белорусский государственный университет

e-mail: kalininai@bsu.by, lavrinovich@bsu.by

Доклад посвящен построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению следующей задачи оптимизации переходного процесса в линейной сингулярно возмущенной системе:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, y(t_*) = y_*, y(t^*) = 0, \\ \mu \dot{z} &= A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, z(t_*) = z_*, z(t^*) = 0, \\ J(u) &= \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (y' M(t)y + \mu z' L(t)z + u' P(t)u) dt \rightarrow \min,\end{aligned}$$

где μ — малый положительный параметр, t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$), y — вектор медленных переменных, z — вектор быстрых переменных, u — вектор управления, $M(t)$, $L(t)$ — неотрицательно-определенные симметричные матрицы, а $P(t)$ — положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \in [t_*, t^*]$. Предполагается, что элементы всех матриц, формирующих задачу, являются достаточно гладкими функциями времени, при этом действительные части всех собственных значений матрицы $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$ отрицательны.

При построении асимптотики исходная задача распадается на две невозмущенные задачи оптимального управления с n и m фазовыми переменными соответственно, при этом удастся избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими. Отмеченная декомпозиция дает возможность эффективно решать задачи оптимального управления с большим числом фазовых переменных.

ГЛОБАЛЬНІ АТРАКТОРИ ІМПУЛЬСНИХ ДИНАМІЧНИХ
СИСТЕМ, ПОРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИМИ
ВКЛЮЧЕННЯМИ

О. КАПУСТЯН¹, І. РОМАНЮК¹, С. ДАШКОВСЬКИЙ²

¹ Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

² Інститут математики, Університет Вюрцбурга, Німеччина

e-mail: kapustyanav@gmail.com, romanjuk.iv@gmail.com,

sergey.dashkovskiy@mathematik.uni-wuerzburg.de

В роботі методами теорії глобальних атракторів досліджується якісна поведінка імпульсних еволюційних систем, які характеризуються наявністю імпульсних збурень при досягненні фазовою точкою фіксованої гіперповерхні в фазовому просторі. [1]. Основною проблемою при вивченні таких об'єктів є втрата неперервної залежності розв'язку від початкових даних. У нескінченновимірному випадку це може привести до руйнування глобального атрактора [2]. В даній роботі досліджено імпульсні динамічні системи, породжені параболічними включеннями. Введено поняття мнозначної імпульсної ДС, обгрунтовано його коректність, встановлено критерій існування глобального атрактора та досліджено його властивості. Одержані результати застосовано до задачі виду

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \in \varepsilon F(u), \\ u|_{t=0} = u_0 \in H, \\ \Delta u|_{u \in M} \in I(u) - u, \end{cases}$$

де умови на оператор A , відображення F, I та множину M забезпечують глобальну розв'язність та дисипативність. Для достатньо малих $\varepsilon > 0$ встановлено існування глобального атрактора в фазовому просторі H та досліджено його властивості.

1. **Самойленко А.М., Перестюк Н.А.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / Самойленко А.М., Перестюк Н.А. – К. : Вища школа, 1987.
2. **Перестюк М.О., Капустян О.В.** Існування глобальних атракторів для імпульсних динамічних систем / Перестюк М.О., Капустян О.В. // Доповіді НАН України. - 2015. - № 12. - С. 13-18.

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З МІНІМАЛЬНОЮ ЕНЕРГІЄЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ У КЛАСІ НЕСТАЦІОНАРНИХ КЕРУВАНЬ

О.А. КАПУСТЯН

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

e-mail: olena.kap@gmail.com

У роботі досліджується класична розв'язність задачі оптимального керування з мінімальною енергією для параболічного рівняння у круговій області з нелокальними крайовими умовами у класі нестационарних керувань. Розв'язність такої задачі у випадку стаціонарних керувань була доведена в [1].

В області $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Omega = \{(r, \theta) | r \in (0, 1), \theta \in (0, \pi)\}$ розглядається задача: знайти функцію стану $y(t, r, \theta)$ і залежну від часу функцію керування $u(t, r, \theta)$, такі що

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t, r, \theta)}{\partial t} = \Delta y(t, r, \theta) + u(t, r, \theta), & (t, r, \theta) \in Q, \\ y(t, 1, \theta) = 0, & t \in (0, T), \theta \in (0, \pi), \\ \frac{\partial y(t, r, 0)}{\partial \theta} = \frac{\partial y(t, r, \pi)}{\partial \theta}, & t \in (0, T), r \in (0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

$$y(0, r, \theta) = h(r, \theta), \quad y(T, r, \theta) = z(r, \theta), \quad (2)$$

$$J(u) = \int_0^T \int_0^1 r \|u(t, r)\|_{L_2(0, \pi)}^2 dr dt \rightarrow \inf, \quad (3)$$

де $\Delta y = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial y}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$ є оператором Лапласа у полярних координатах, $h, z \in C(\bar{\Omega})$ — задані функції.

Основним результатом є доведення класичної розв'язності задачі (1)–(3) для широкого класу початкових даних.

1. **Капустян О.А.** The optimal control problem with minimum energy for one non-local disributed system / О.А. Kapustian, О.К. Mazur // Continuous and Distributed Systems III. Theory and Applications, Series “Studies in Systems, Decision and Control”. – Springer. – 2016.

УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМ С МАКСИМУМОМ НА ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

О.Д. КИЧМАРЕНКО, К.А. КОРХОВ

Кафедра оптимального управления и
экономической кибернетики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
e-mail: olga.kichmarenko@gmail.com, korkhov.kons@gmail.com

В работах А.Р. Магомедова [1] и Е.П. Попова [2] впервые были представлены модели некоторых систем автоматического регулирования в форме дифференциальных уравнений с максимумом неизвестной функции на некотором интервале предыстории.

Книга [3] посвящена изучению основных вопросов общей теории дифференциальных уравнений с максимумом, а в работах [4] и [5] обоснован метод усреднения для дифференциальных уравнений с максимумом.

В то же время широко используются системы разностных уравнений для моделирования дискретных систем, например, [6]. Обоснование схем усреднения для уравнений на дискретном времени представлено в [7, 8].

В докладе приводится обоснование метода усреднения для дискретных систем с максимумом, представленных в следующем виде:

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot f \left(i, x_i, \max_{s \in [i-h, i]} x_s \right) \quad (1)$$

при известных начальных условиях

$$x_{-h}, x_{-h+1}, \dots, x_{-1}, x_0. \quad (2)$$

Здесь $x_i \in D \subset R^n$ – текущее состояние системы, индекс i определяет текущий момент дискретного времени, $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $N = \lfloor L\varepsilon^{-1} \rfloor$, $L = \text{const}$, $\lfloor a \rfloor = \max\{z \in Z | z < a\}$ – целая часть (floor) числа a , $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $f \left(i, x_i, \max_{s \in [i-h, i]} x_s \right)$ – заданная n -мерная функция, состояние системы в момент времени s ($s < i$) влияет на текущее i -е состояние системы, причем момент дискретного времени s выбирается на промежутке предыстории

$I_{i-h} = \{i-h, i-h+1, \dots, i-1, i\}$ из условия максимума значений состояний $x_{i-h}, x_{i-h+1}, \dots, x_{i-1}, x_i$.

Для случая периодичности функции правой части уравнения (1) строится усредненная система и устанавливаются условия близости решения исходной и усредненной систем на конечном асимптотически большом промежутке дискретного времени $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$.

1. **Magomedov A.R.** Some question of differential equations with maximums / A.R. Magomedov // Izv. Akad. Nauk Azerb.SSR, Ser. Fiz.-Tek. i Mat. Nauk. – 1997. – № 1. – p. 104–108 (Russian).
2. **Popov E.P.** Automatic Regulation and Control, Nauka, Moscow, 1966. (Russian).
3. **Bainov D.D.** Differential equations with maxima / Bainov D.D., Hristova S.G. – CRC Press Tylor and Francis Group, 2011. – 291 p.
4. **Плотников В.О.** Усреднения дифференціальних рівнянь з максимумом / В.О. Плотников, О.Д. Кічмаренко // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 78–82.
5. **Plotnikov V.A.** A note on the averaging method for differential equations with maxima / V.A. Plotnikov, O.D. Kichmarenko // Iranian Journal of optimization. – 2009. – V.1, № 2. – P. 132–140.
6. **Benjamin C. Kuo.** Digital control systems (2nd ed.) – Oxford University Press, 1995. – 784 p.
7. **Белан Е.Л.** О методе усреднения в теории конечно-разностных уравнений / Е.Л. Белан // Украинский математический журнал. – 1967. – Т. 19, № 3. – С. 85–90.
8. **Плотников В.А.** Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления / В.А. Плотников, Л.И. Плотникова, А.Т. Яровой // Нелинейные колебания. – 2004. – Т.7, № 2. – С. 241–254.
9. **Кичмаренко О.Д.** Усреднение систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием / О.Д. Кичмаренко, М.Л. Карпычева // Научный вестник Ужгородского университета. Математика и информатика. – 2012. – Вып. 23, № 2. – С. 76–85.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И АСИМПТОТИКА НЕКОТОРЫХ
КЛАССОВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА ЗАДАННОГО ВИДА
Л.Л. КОЛЬЦОВА

Кафедра высшей математики
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
e-mail: koltsova.liliya@gmail.com

Продолжены исследования существования и асимптотического поведения при $t \rightarrow +\infty$ неограниченно продолжаемых вправо решений (п-решений) обыкновенного дифференциального уравнение второго порядка вида:

$$F(t, y, y', y'') = \sum_{k=1}^n p_k(t) y^{\alpha_k} |y'|^{\beta_k} |y''|^{\gamma_k} = 0, \quad (1)$$

$n \in \mathbf{N}, n \geq 2, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbf{R}, \sum_{k=1}^n |\gamma_k| \neq 0, p_k \in C([a; +\infty), a > 0; \mathbf{R})$
($k = \overline{1, n}$), $p_i(t) \neq 0$ ($i = \overline{1, s}, 2 \leq s \leq n$).

Основной результат получен при предположении, что существует функция $v \in C^2([t_1; +\infty), t_1 > a; \mathbf{R})$, обладающая следующими свойствами:

A) $v(t) > 0, v''(t) \neq 0$ на $[t_1; +\infty)$, $v(+\infty)$ равно либо 0, либо $+\infty$;

B) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p_i(t) v^{\alpha_i}(t) |v'(t)|^{\beta_i} |v''(t)|^{\gamma_i}}{p_1(t) v^{\alpha_1}(t) |v'(t)|^{\beta_1} |v''(t)|^{\gamma_1}} = c_i$ ($0 \neq c_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, s}$)
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p_j(t) v^{\alpha_j}(t) |v'(t)|^{\beta_j} |v''(t)|^{\gamma_j}}{p_1(t) v^{\alpha_1}(t) |v'(t)|^{\beta_1} |v''(t)|^{\gamma_1}} = 0$ ($j = \overline{s+1, n}$);

C) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(v'(t))^2}{v''(t)v(t)} = 0$.

Теорема. Пусть существует функция $v \in C^2([t_1; +\infty), t_1 > a; \mathbf{R})$, удовлетворяющая условиям **A) – C)**. Тогда для того, чтобы существовало п-решение $y(t)$ дифференциального уравнения (1) вида $y^{(k)}(t) = v^{(k)}(t) (1 + o(1))$ ($t \rightarrow +\infty, k = \overline{0, 2}$) необходимо, а если $\sum_{i=1}^s \gamma_i c_i \neq 0, \sum_{i=1}^s (\beta_i + \gamma_i) c_i \neq 0, \sum_{i=1}^s (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) c_i \neq 0$, то и достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^s c_i = 0$.

1. **Koltsova L, Kostin A.** The Asymptotic behavior of Solutions of Monotone type of First-order Nonlinear Ordinary Differential Equations, unresolved for the derivative. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, № 57, Tbilisi, 2012., P. 51-74.
2. **Костин А.В.** Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 3. – С. 524-526.

МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ДВУХИНДЕКСНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА СВЁРТКИ С ДВУМЯ ЯДРАМИ

А.Л. Комарницкий, Л.Н. Колмакова

Кафедра высшей математики и моделирования систем
Одесский национальный политехнический университет

e-mail: lyukol@mail.ru

Пусть $\nu > 0$ — иррациональное число, $k^{(j)} = \{k_{n,m}^{(j)}\} \in l_1(Z^2)$, $(j = 1, 2)$, $h = \{h_{n,m}\} \in l_2(Z^2)$. Рассмотрим бесконечную алгебраическую систему типа свёртки с двумя ядрами:

$$\sum_{\nu j+l>0} k_{n-j,m-l}^{(1)} \varphi_{j,l} + \sum_{\nu j+l<0} k_{n-j,m-l}^{(2)} \varphi_{j,l} = h_{n,m} \quad (n, m \in Z) \quad (1)$$

Неизвестную последовательность $\varphi = \{\varphi_{n,m}\}$ ищем в классе $l_2(Z^2)$.

Вводятся две неизвестные последовательности $\varphi^\pm = \{\varphi_{n,m}^\pm\} \in l_2(Z^2)$, причем $\varphi_{n,m}^+ = 0$ при $\nu n + m < 0$, $\varphi_{n,m}^- = 0$ при $\nu n + m \geq 0$. Систему (1) можно записать в виде :

$$\sum_{j,l \in Z} k_{n-j,m-l}^{(1)} \varphi_{j,l}^+ + \sum_{j,l \in Z} k_{n-j,m-l}^{(2)} \varphi_{j,l}^- = h_{n,m}. \quad (2)$$

Если в (2) перейти к двухиндексным изображениям Фурье, то получим двухэлементную краевую задачу Римана для функции двух переменных

$$K^{(1)}(x, \xi) \Phi^+(x, \xi) + K^{(2)}(x, \xi) \Phi^-(x, \xi) = H(x, \xi), \quad (x, \xi \in R),$$

которая при $K^{(1)}(x, \xi) \neq 0$ приводится к стандартному виду

$$\Phi^+(x, \xi) = A(x, \xi) \Phi^-(x, \xi) + G(x, \xi), \quad (3)$$

где $A(x, \xi) = -K^{(2)}(x, \xi) (K^{(1)}(x, \xi))^{-1}$, $G(x, \xi) = H(x, \xi) (K^{(1)}(x, \xi))^{-1}$.

Нахождение общего решения задачи (3) методом факторизации и условия её разрешимости рассмотрены в [1].

1. **Комарницкий О.Л.** Про одну крайову задачу Римана для функції двох змінних // Математика та психологія у педагогічній системі «Технічний університет»: Зб. ст. 1-ї Міжнародної науков.-практ. конф. / ОДПУ. – Одеса, 1996. – с.60-61.

MIN-ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ И ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ, ФУНКЦИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ И ПОЗИЦИОННЫЙ СИНТЕЗ

В.И. КОРОВОВ

Кафедра прикладной математики

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua

Дается конструктивный подход к решению задачи позиционного синтеза. А именно, мы рассмотрим следующую задачу: для системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in \Omega \subset R^m$$

необходимо найти управление $u = u(x) \in \Omega$ такое, что траектория $x(t)$ замкнутой системы $\dot{x} = f(x, u(x))$, выходящая из произвольной точки $x^0 \in U(0)$, где $U(0)$ – некоторая окрестность начала координат, оканчивается в точке 0 в некоторый конечный момент времени $T(x_0) < +\infty$, т. е., $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow T(x^0)$. Мы опишем метод функции управляемости [1], предложенный автором в [2] для решения поставленной задачи. Этот метод является развитием метода функции Ляпунова.

В случае, когда время попадания $T(x_0)$ является минимальным мы приходим к задаче быстрогодействия. Для линейных систем эта задача сводится к min-проблеме моментов Маркова, которая была поставлена и решена в [3], [4].

1. **Коровов В.И.** Метод функции управляемости / Коровов В.И. – М.-Ижевск : НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2007. – 576 с.
2. **Коровов В.И.** Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / В.И. Коровов // Матем. сборник. – 1979. – Т. 109(151), № 4(8). – С. 582-606.
3. **Коровов В.И.** Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов / В.И. Коровов, Г.М. Скляр // Матем. сборник. – 1987. – Т. 134(176), № 2(10). – С. 186-206.
4. **Коровов В.И.** Проблема моментов Маркова на минимально возможном отрезке / В.И. Коровов, Г.М. Скляр // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 308, № 3. – С. 525-528.

О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРОЙ НЕЯВНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

Ю.В. Кузина

Кафедра фундаментальных наук

Военная академия г. Одесса

e-mail: yuliak@te.net.ua

Рассматривается задача Коши

$$P(t, x(t), x'(t)) = 0, x(0) = 0$$

где $x : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ — неизвестная функция, $P : (0, \tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторый многочлен с действительными коэффициентами. Решением данной задачи называется непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$, $(0 < \rho < \tau)$, которая тождественно удовлетворяет данному дифференциальному уравнению при всех $t \in (0, \rho)$, причем $x(t) \rightarrow 0$, если $t \rightarrow +0$.

Формулируются достаточные условия, при выполнении которых у рассматриваемой задачи существуют непустые множества решений $x : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, где ρ — достаточно мало; каждое из этих решений обладает требуемыми асимптотическими свойствами при $t \rightarrow +0$. Устанавливаются условия единственности решений указанного вида.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ МОНОТОННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л.И. Кусик

Кафедра высшей и прикладной математики
Одесский национальный морской университет
e-mail: ludakusik@mail.ru

Рассматривается уравнение

$$y'' = \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y')}{\sum_{k=m+1}^{m+n} \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y')}, \quad (1)$$

где $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ ($k = \overline{1, m+n}$), $p_k : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($k = \overline{1, m+n}$) — непрерывные функции, $\omega \leq +\infty$ и $\varphi_{ki} : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ ($k = \overline{1, n+m}$; $i = 0, 1$) — правильно меняющиеся при $z \rightarrow Y_i$ непрерывные функции порядков σ_{ki} , Δ_{Y_i} ($i \in \{0, 1\}$) — односторонняя окрестность Y_i , Y_i ($i \in \{0, 1\}$) равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Определение 1. Решение y уравнения (1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, называется $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если соблюдаются условия

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[\quad , \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

В зависимости от значений λ_0 , конечных или равных $\pm\infty$, эти решения обладают разными асимптотическими свойствами. При этом возникают неособые случаи, когда $\lambda_0 \in R \setminus \{0, 1\}$, и особые, когда $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = \pm\infty$. В каждом из указанных случаев приведены условия, при которых уравнение (1) эквивалентно при $t \uparrow \omega$ двучленному с правильно меняющимися нелинейностями. Получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решений уравнения (1), найдены асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$.

ОБЧИСЛЕННЯ ЦІН ОПЦІОНІВ У МОДЕЛЯХ ФІНАНСОВИХ
РИНКІВ, ЗАДАНИХ ЛІНІЙНИМИ СТОХАСТИЧНИМИ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ ЗІ
СТОХАСТИЧНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ДИФУЗІЇ

С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішюра, Є.Ю. Мунчак

Механіко-математичний факультет

Київського національного університету імені Тараса Шевченка

e-mail: kuchuk.iatsenko@gmail.com, myus@univ.kiev.ua,

yevheniamunchak@gmail.com

Досліджуються питання безарбітражності, а також точного та наближеного обчислення ціни Європейського опціону купівлі (див. [1]) у моделях фінансових ринків зі стохастичною волатильністю, яка задається функціоналом від процесу Орнштейна–Уленбека або процесу Кокса–Інгерсолла–Росса.

У рамках першої моделі ринок описується парою стохастичних диференціальних рівнянь, з яких перше є лінійним відносно ціни акції, а друге – рівнянням Ланжевена:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(Y_t) S_t dW_t, \quad dY_t = -\alpha Y_t dt + k d\widetilde{W}_t.$$

Друга модель є моделлю Хестона, яка задається наступною парою стохастичних диференціальних рівнянь:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{Z_t} S_t dW_t, \quad dZ_t = (b - Z_t) dt + k \sqrt{Z_t} d\widetilde{W}_t.$$

Із застосуванням методів числення Маллявена (див. [2]) встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання опціону. У результаті отримано аналітичну формулу, яка дозволяє обчислити ціну опціону у випадку, коли вінерівський процес, що породжує еволюцію ціни активу, та вінерівський процес, який задає волатильність, є незалежними.

1. **Kuchuk-Iatsenko S. and Mishura Y.** Pricing the European call option in the model with stochastic volatility driven by Ornstein-Uhlenbeck process. Exact formulas, Modern Stoch. Theory Appl., 2015, 2(3), 233-249.
2. **Nualart D.** The Malliavin Calculus and Related Topics, Probability and Its Applications, Second edition, Springer-Verlag Berlin, 2006.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА

Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская

Кафедра теоретической механики

Одесская государственная академия

строительства и архитектуры

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

e-mail: rachinskaya@onu.edu.ua

Исследовано движение динамически симметричного спутника относительно центра масс с учетом моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления. Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с известным эксцентриситетом. Для исследования движения спутника рассматривается система дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными.

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{G}{A_1} - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} ctg \theta - \frac{L_2}{G} ctg \delta, \quad \frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}.\end{aligned}$$

Построены три численные модели исследования движения спутника. Первая модель основывается на асимптотическом и модифицированном методах усреднения с использованием численного метода Рунге-Кутты. Вторая модель построена только на асимптотическом методе с использованием неявных численных схем Адамса. Третья модель построена без асимптотических методов на неявных схемах Адамса.

Проведен сравнительный анализ трех моделей. Построены годографы вектора кинетического момента для всех моделей в трехмерном пространстве. Для третьей модели получены графики изменения углов Эйлера в возмущенном движении спутника и проведен сравнительный анализ с аналогичными функциям в случае невозмущенного движения твердого тела.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛЕГАЛЬНОЙ И НЕЛЕГАЛЬНОЙ ЭКОНОМИК

Д.Е. ЛИМАНСКАЯ

Кафедра дифференциальных уравнений

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

e-mail: liman.diana@gmail.com

Сложные взаимодействия легальной и нелегальной экономик предлагается рассматривать при помощи комплекснозначной производственной функции комплексной переменной, где объемом производства при вложенных ресурсах z будем считать значение производственной функции y в точке z :

$$y = y(z), \quad (1)$$

где $y : D \rightarrow G_1, D \subset C, G_1 \subset C^n, n \in N, 0 \in D, 0 \in G_1$.

При этом будем считать, что при $z = \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z$, то $\operatorname{Re} z$ — легальные ресурсы, $\operatorname{Im} z$ — нелегальные ресурсы. Аналогично, при $y = \operatorname{Re} y + i\operatorname{Im} y$, будем считать, что $\operatorname{Re} y$ — легальный объем производства, а $\operatorname{Im} y$ — нелегальный объем производства.

Обозначим через $y' = \operatorname{Re} y' + i\operatorname{Im} y'$ скорость изменения объема производства, где под $\operatorname{Re} y'$ будем понимать скорость изменения легального объема производства, а под $\operatorname{Im} y'$ будем понимать скорость изменения нелегального объема производства.

Изучается нелинейная модель, когда скорость объема производства регулируется факторами первого и второго уровней, вида:

$$y' = P(z) \times y + f(z, y, y'), \quad (2)$$

где $P : D \rightarrow C^{n \times n}, f : D \times G_1 \times G_2 \rightarrow C^n, G_2 \subset C^n, 0 \in D \times G_1 \times G_2$.

Для этой модели найдены достаточные условия существования аналитической производственной функции и ее оценка вблизи точки $z = 0$. Таким образом, моделируется процесс поведения производственной функции при малых изменениях ресурсов.

1. **Лиманская Д.Е.** О поведении решений некоторых систем дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных /Лиманская Д.Е., Самкова Г.Е. — Одесса : Вестник ОНУ. Математика и механика, 2014. — Т. 19, № 1(21) — С.16-28.

ПРОБЛЕМА ИЗБЕЖАНИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ
В НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ИГРАХ

Е.А. ЛЮБАРЩУК

Кафедра прикладной математики
и информационных технологий

Черновицкий национальный университет им. Ю. Федьковича

e-mail: finvara@gmail.com

Рассмотрим задачу преследования, которая описывается системой линейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа[1]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t - \tau) + C\dot{z}(t - \tau) + \varphi(t, u, v), \quad t > 0; \quad (1)$$

$$z(t) = z_0(t), \quad -\tau \leq t \leq 0.$$

Где $z \in R^n$, A, B, C - $n \times n$ постоянные матрицы, $\tau = const$. Блок управления $\varphi(t, u, v) : [0, +\infty) \times R^p \times R^q$ - удовлетворяет условиям Каратеодори.

Терминальное множество вида [2, 3]

$$M^*(t) = M_0 + M(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad (2)$$

где M_0 - л.п.п. из R^n , а $M(t)$ - принимает значения из $K(L)$, где L - ортогональное дополнение к M_0 в пространстве R^n .

Управление преследователя выбирается в виде квазистратегии

$$u(t) = u(z_0(\cdot), v_t(\cdot)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U, \quad (3)$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) : v(s) \in V(s), \quad s \in [0, t]\}$ - предыстория управления убегающего до момента t .

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Л. С. Понтрягина, отображение M - опузклозначное и для начального состояния $z_0(\cdot)$ и некоторого селектора $\gamma(\cdot, \cdot) \in \Gamma$, $T \in T(z_0(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \emptyset$. Тогда траектория процесса (1) может быть приведена с начального положения $z_0(\cdot)$ на терминальное множество $M^*(T)$ в момент T с помощью управления (3).

1. **Bellman R.** Differential-Difference Equations / R. Bellman, K.Cooke. – Academic Press. – New York/London, 1963.
2. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы / А.А. Чикрий. – Киев: Наукова думка, 1992. – 384 с.
3. **Чикрий А.А.** Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения / А.А. Чикрий // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – 2010. – 271. – С. 76-92.

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ ПО ХАУСДОРФУ

О.Д. КИЧМАРЕНКО, М.И. НАТАЛЬЧИШИН

Кафедра оптимального управления
и экономической кибернетики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

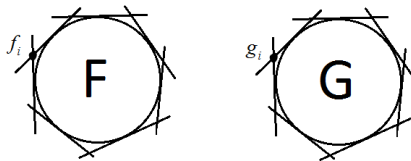
e-mail: olga.kichmarenko@gmail.com, keyfay@ukr.net

Понятие расстояние по Хаусдорфу впервые появилось в книге Феликса Хаусдорфа «Основы теории множеств» [1], используется в таких популярных прикладных дисциплинах как распознавание образов, робототехнике, компьютерной хирургии и др. Метрика Хаусдорфа есть естественная метрика, определённая на множестве всех непустых компактных подмножеств метрического пространства. Таким образом, метрика Хаусдорфа превращает множество всех непустых компактных подмножеств метрического пространства в метрическое пространство.

Пусть F и G - два непустых компактных подмножества метрического пространства. Тогда расстояние по Хаусдорфу $h(F, G)$ между F и G - минимальное число r такое, что замкнутая r -окрестность F содержит G и наоборот:

$$h(F, G) = \min\{r \geq 0 : F \subset G + S_r(0), G \subset F + S_r(0)\} \quad (1)$$

а так как F и G мы можем представить в виде вершин описанного многогранника f_i и g_i (i - количество вершин) то значение



будет приближенным значением $h(F, G)$.

1. **Хаусдорф Ф.** “Grundzüge der Mengenlehre” (Основы теории множеств) / пер. с нем. Н. В. Веденисов. – Москва : ОНТИ, 1937. — 306 с.

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Н.И. ОБОДАН, В.А. ГРОМОВ

Кафедра вычислительной математики
и математической кибернетики

Днепропетровский национальный университет

имени Олеса Гончара

e-mail: stroller@rambler.ru

Предлагается подход к решению обратной задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана: подход основывается на построении решений прямой задачи теории бифуркаций для данных уравнений с последующим выявлением характерных последовательностей решений, фиксируемых на ветвях первичного и вторичного ветвления соответствующей краевой задачи. Для построения предвестников бифуркаций (характерных последовательностей) использовалась кластеризация последовательностей решений, фиксируемых на указанных ветвях решения. Данный подход был применён для решения обратной задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана с постоянной правой частью.

Применение предложенного алгоритма позволило построить множество предвестников бифуркации для решения указанной задачи. Анализ полученных кластеров позволил установить их соответствие участкам ветвей первичного и вторичного ветвления, полученных в рамках решения прямой задачи теории бифуркаций. Следует подчеркнуть, что центр каждого из кластеров может рассматриваться как усреднённое представление различных вариантов поведения теряющей устойчивость тонкостенной системы в окрестности соответствующего участка закритической ветви. Одному участку закритической ветви между двумя соседними экстремумами обычно отвечают один-три кластера.

В среднем участок ветви, отвечающий одному кластеру, соответствует 5-7 % вариации в значении параметра. Таким образом, общее число кластеров также невелико, что делает возможным быстрое решение обратной задачи теории бифуркаций.

Сочетание решения прямой задачи теории бифуркаций с кластеризацией решений прямой задачи, фиксируемых на ветвях первичного и вторичного ветвления, позволяет построить множе-

ство топологических предвестников бифуркации, позволяющих не просто отличать предбифуркационное состояние от состояния, не ведущего к бифуркации, но и различать состояния, предшествующие различным типам бифуркации, наблюдаемых в нелинейной краевой задаче для уравнений Кармана.

Предложенный подход к решению обратной задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана позволяет идентифицировать предбифуркационные состояния с высокой степенью точности за достаточно малое время.

Указанные обстоятельства позволяют использовать рассматриваемый подход к решению обратной задачи теории бифуркаций для решения задачи аварийной идентификации тонкостенных систем.

УСРЕДНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С МЕДЛЕННЫМИ И БЫСТРЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ
НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

А.П. ОГУЛЕНКО

Кафедра оптимального управления
и экономической кибернетики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

e-mail: ogulenko.a.p@onu.edu.ua

В докладе представляется обоснование схемы усреднения для динамических систем на временных шкалах, содержащих быстрые и медленные переменные. Систематизация основных результатов для уравнений на временных шкалах представлена в работах М. Bohner, А. Peterson [1,2].

Рассматривается динамическая система на временной шкале следующего вида:

$$\begin{cases} x^\Delta(t) = \varepsilon X(t, x, y), \\ y^\Delta(t) = Y(t, x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\mathbb{T}$ — временная шкала — непустое замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ — время, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ — медленная и быстрая переменные соответственно, x^Δ, y^Δ — Δ -производные, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Предположим, что решение вырожденной системы при $\varepsilon = 0$ найдено в виде $x = \text{const}$, $y(t) = \varphi(t, x, c)$. Как показано в [3], наложив определенные ограничения на правую часть системы (1), можно преобразовать ее к виду

$$\begin{cases} x^\Delta(t) = \varepsilon X(t, x, \varphi(t, x, c)), \\ c^\Delta(t) = \varepsilon C(t, x, c), \end{cases} \quad (2)$$

где $C(t, x, c)$ выражается при помощи так называемой формулы Алексеева.

Применяя к (2) метод усреднения, описанный для систем на временных шкалах в [4], исследуются вопросы близости решений системы (1) и соответствующей (2) усредненной системы. Рассматривается случай, когда усреднение правой части уравнения для переменной c произвести невозможно.

1. **Bohner M., Peterson A.** Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. Boston: Birkhäuser, 2001
2. **Bohner M., Peterson A.** Advances in Dynamic Equations on Time Scales. Birkhäuser, Boston, 2003.
3. **Lakshmikantham, V.** Dynamic systems on measure chains / V. Lakshmikantham, S. Sivasundaram. B. Kaymakçalan. – Mathematics and its applications. – 1996. – Vol. 370.
4. **Огуленко А. П., Кичмаренко О. Д.** Схема полного усреднения на временных шкалах // Вестник Одесск. нац. ун-та. Матем. и мех. — 2012. — Т.17, вып. 4 (16). — С. 67–77.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

В.В. Пічкур

Кафедра моделювання складних систем

Факультет кібернетики

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

e-mail: vpichkur@gmail.com

В доповіді пропонуються результати дослідження задач практичної стійкості дискретних систем, які були проведені протягом останнього десятиліття. Аналіз якісних характеристик розв'язків дискретних систем представляє самостійний інтерес. Разом з тим, перехід на початковому етапі від неперервних систем до дискретних дозволяє спростити аналіз і алгоритмічну реалізацію методів практичної стійкості.

В основі результатів лежить обґрунтування топологічних властивостей максимальної множини початкових умов, яку ми називаємо максимальною множиною практичної стійкості. Така множина складається з початкових умов, для яких відповідні розв'язки в динаміці не покидають фіксованих фазових обмежень на заданому скінченному часовому проміжку. Для нелінійної дискретної системи ми обґрунтували компактність максимальної множини практичної стійкості, умови належності точок до границі і внутрішності такої множини. Ми показали, що для того, щоб початкова умова належала границі максимальної множини практичної стійкості, необхідно і достатньо, щоб відповідний розв'язок дискретної системи в динаміці вийшов на границю фазових обмежень, залишаючись на всьому часовому проміжку у фазових обмеженнях. Отже, внутрішність максимальної множини початкових умов складається з точок, для яких відповідні їм розв'язки дискретної системи залишаються у внутрішності фазових обмежень. На основі властивостей максимальної множини початкових умов ми обґрунтували необхідні і достатні умови практичної стійкості, використовуючи функцію, яка традиційно називається функцією Ляпунова. Побудова функції Ляпунова є конструктивною і оснований на визначальній функції максимальної множини початкових умов.

Для лінійних дискретних систем вдається побудувати конструктивні критерії практичної стійкості за умови опуклості фазових обмежень. У цьому випадку максимальна множина початкових умов є опуклою, що дозволяє знайти її функцію Мінковського, обернену функцію Мінковського, опорну функцію, а також розробити алгоритми для побудови таких множин. Ми одержали оцінки множини початкових умов і множини фазових обмежень в класі куль і еліпсоїдів, на основі яких розробили відповідні числові методи. Окрім цього, ми застосували подібні підходи при дослідженні задач зовнішньої практичної стійкості дискретних систем та практичної стійкості дискретних включень [1]–[4].

1. **Bashnyakov A.N.** On Maximal Initial Data Set in Problems of Practical Stability of Discrete System / A.N. Bashnyakov, V.V. Pichkur, I.V. Hitko // Journal of Automation and Information Sciences. – 2011. – V. 43, 3. – P. 1-8.
2. **Башняков О.М.** Умови практичної стійкості дискретних систем і функції Ляпунова / О.М. Башняков, В.В. Пічкур, І.В. Хітько // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2012. – № 3. – С. 125-133.
3. **Pichkur V.V.** Maximum set of initial conditions for the problem of weak practical stability of a discrete inclusion / V.V. Pichkur, M.S. Sasonkina // J. Math. Sci. – 2013. – V. 194, 4. – P. 414-425.
4. **Гаращенко Ф.Г.** О свойствах максимального множества внешней практической устойчивости дискретных систем / Ф.Г. Гаращенко, В.В. Пичкур // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 2. – С. 30-36.

ПОШАГОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

А.А. Плотников

Кафедра оптимального управления
и экономической кибернетики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

e-mail: aaplotnikov@ukr.net

Пусть $\theta > 0$ произвольное действительное число. Обозначим через Σ_θ множество функций $n(\cdot) : R_+ \rightarrow N$, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) $n(\cdot)$ - кусочно-постоянные и кусочно-непрерывные справа; 2) если $n(t-0) - n(t) \neq 0$, то $n(\tau) - n(t) = 0$ для всех $\tau \in [t, t + \theta]$.

Обозначим через Φ_n множество функций $\varphi_n(t, x)$ таких, что
$$\varphi_n(t, x) = \begin{cases} x, & n(t-0) = n(t), \\ \psi(x), & n(t-0) \neq n(t), \end{cases} \quad \text{где } \psi : R^{n(t-0)} \rightarrow R^{n(t)}.$$

Теперь рассмотрим следующую систему с малым параметром

$$\dot{x} \in \varepsilon F(t, x, n), \quad x(0, n, \varphi) = x_0, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $t \in R_+$ - время; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $\varphi(\cdot, \cdot) \in \Phi_n$; $x(t, n, \varphi)$ - фазовый вектор; $F(t, x, n) : R_+ \times R^{n(t)} \times \Sigma_\theta \rightarrow \text{comp}(R^{n(t)})$ - многозначное отображение с переменной размерностью.

Возьмем некоторое $\omega > 0$. Обозначим через Γ множество точек пространства R_+ таких, что $\gamma_i = i\omega$, $i = 0, 1, \dots$, а через Υ множество точек τ_i таких, что $n(\tau_i - 0) - n(\tau_i + 0) \neq 0$. Пусть $\Xi = \Gamma \cup \Upsilon$.

Поставим в соответствие системе (1) следующую усредненную систему

$$\dot{y} \in \varepsilon \bar{F}(t, y, n), \quad y(0, n, \varphi) = x_0, \quad (2)$$

где $t_i \in \Xi$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $\bar{F}(t, x, n) = \{F_i(x, n) :$

$$F_i(x, n) = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s, x, n) ds, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots\}. \quad (3)$$

В докладе обосновывается возможность применения данной пошаговой схемы усреднения на конечном промежутке.

ПОЛНОЕ УСРЕДНЕНИЕ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ
ГУРСА—ДАРБУ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ
КАЧЕСТВА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А.В. Плотников¹, Т.А. Комлева², Л.И. Плотникова³

¹Кафедра прикладной, вычислительной математики и САПР

²Кафедра высшей математики

Одесская государственная академия

строительства и архитектуры

³Кафедра высшей математики и моделирования систем

Одесский национальный политехнический университет

e-mail: ¹a-plotnikov@ukr.net, ²t-komleva@ukr.net,

³liplotnikova@ukr.net

В докладе рассматривается управляемая задача Гурса—Дарбу в условиях неопределенности

$$\frac{\partial^2 z(x, y, u, v)}{\partial x \partial y} = \varepsilon^2 f(x, y, z(x, y, u, v), u(x, y), v(x, y)), \quad (1)$$

$$z(x, 0) = \varphi(x), \quad z(0, y) = \psi(y), \quad x, y \in [0, T], \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $f : [0, T] \times [0, T] \times R^n \times R^m \times R^k \rightarrow R^n$; $\varphi : [0, T] \rightarrow R^n$; $\psi : [0, T] \rightarrow R^n$; $\varphi(0) = \psi(0) = 0$; $u(x, y) \in U \in \text{conv}(R^m)$ — управление; $v(x, y) \in V \in \text{conv}(R^k)$ — помеха; $T = L\varepsilon^{-1}$.

Поведение системы оценивается терминальным критерием качества

$$J(u, v) = \Phi(z(T, T, u, v)), \quad (3)$$

где $\Phi : R^n \rightarrow R^1$.

В докладе обосновывается возможность применения полной схемы усреднения для задачи (1)-(3) при помощи перехода к управляемой многозначной задаче Гурса—Дарбу (управляемому гиперболическому дифференциальному включению) (4),(2),(3):

$$\frac{\partial^2 z(x, y, u)}{\partial x \partial y} \in \varepsilon^2 F(x, y, z(x, y, u), u(x, y)). \quad (4)$$

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МУРАВЬИНОГО АЛГОРИТМА

С.И. Полюга, А.В. НЕЛАСАЯ

Кафедра математического анализа

Запорожский национальный университет

Кафедра защиты информации

Запорожский национальный технический университет

e-mail: veta99@mail.ru, annanelasa@gmail.com

В последние годы интенсивно разрабатывается научное направление Natural Computing — «Природные вычисления», объединяющее математические методы, в которых заложены принципы природных механизмов принятия решений.

К таким методам относятся муравьиные алгоритмы. Автором идеи является Марко Дориго, который в 1992 году предложил заимствовать описанный природный механизм для решения задач оптимизации [1].

Идея муравьиного алгоритма - моделирование поведения муравьёв, связанного с их способностью быстро находить кратчайший путь от муравейника к источнику пищи и адаптироваться к изменяющимся условиям, находя новый кратчайший путь.

Одной из наиболее известных задач комбинаторной оптимизации, для которой был реализован муравьиный алгоритм является задача коммивояжера. Эта задача относится к NP-трудным и заключается в нахождении кратчайшего гамильтонова цикла в графе.

На основании фрагментарного подхода [2] предлагается метод, который позволяет свести комбинаторную задачу к задаче коммивояжера. Комбинация двух вышеуказанных подходов позволяет обобщить муравьиный алгоритм для задачи коммивояжера на другие сложные комбинаторные задачи.

1. **Dorigo M.** Optimization, Learning, and Natural Algorithms. PhD Thesis, Dipartimento di Elettronica, Politecnico Di Milano, Italy. – 1992. – 140 p.
2. **Козин И.В.** Фрагментарные модели для некоторых экстремальных задач на графах / И.В. Козин, С.И. Полюга // Математичні машини і системи. – Київ, 2014. – №1. – С. 143-150.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА ПЛОЩАДИ

Р.Р. САЛИМОВ, Б.А. КЛИЩУК

Институт математики НАН Украины

e-mail: ruslan623@yandex.ru, bogdanklishchuk@mail.ru

Пусть задано семейство Γ кривых γ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Борелевскую функцию $\varrho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ называют *допустимой* для Γ , пишут $\varrho \in \text{adm } \Gamma$, если $\int_{\gamma} \varrho(z) |dz| \geq 1$ для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. Тогда p -модулем семейства Γ называется величина $M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \text{adm } \Gamma} \int \varrho^p(z) dx dy$, где $p > 1$.

Для произвольных множеств E, F и G в $\mathbb{C}$ через $\Delta(E, F, G)$ обозначим семейство всех непрерывных кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, которые соединяют E и F в G , т. е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ и $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$, и $S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}$, $i = 1, 2$. Пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ является кольцевым Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля в точке $z_0 \in D$, если соотношение $M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \int_{\mathbb{A}} Q(z) \eta^p(|z - z_0|) dx dy$ выполнено для любого кольца $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$. Пусть $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, $Q : \mathbb{B} \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая функция по Лебегу и $\mathcal{H}$ — множество всех кольцевых Q -гомеоморфизмов $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ относительно p -модуля в точке $z_0 = 0$ при $p > 2$ с условием $\frac{1}{2\pi t} \int_{|z|=t} Q(z) |dz| \leq q_0 t^{-\alpha}$, $q_0 \in (0, \infty)$, $\alpha \in [0, \infty)$, для п.в. $t \in (0, 1)$. Рассмотрим на классе $\mathcal{H}$ функционал площади $\mathbf{S}_r(f) = |fB_r|$, где $B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Ниже приведена теорема о минимизации функционала $\mathbf{S}_r(f)$ на классе $\mathcal{H}$.

Теорема. Для всех $r \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\min_{f \in \mathcal{H}} \mathbf{S}_r(f) = \pi \left(\frac{p-2}{\alpha+p-2} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} q_0^{\frac{2}{2-p}} r^{\frac{2(\alpha+p-2)}{p-2}}.$$

ГИБРИДНЫЙ МЕТОД ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
С МОНОТОННЫМИ НЕЛИПШИЦЕВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ
В.В. СЕМЕНОВ, С.В. ДЕНИСОВ

Кафедра вычислительной математики

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

e-mail: semenov.volodya@gmail.com, sireukr@gmail.com

Рассмотрено операторное уравнение

$$Ax = 0,$$

где A — монотонный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Для решения уравнения предложен сильно сходящийся метод с динамической регулировкой величины шага. Относительно оператора A не предполагается липшицевость. Метод имеет следующий вид (символом P_C обозначим оператор метрического проектирования на выпуклое замкнутое множество C).

Инициализация. Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$, элемент $x_0 \in H$.

Итерационный шаг. Для $x_n \in H$ вычисляем

$$y_n = x_n - \lambda_n Ax_n,$$

где λ_n получаем из условия

$$\begin{cases} j(n) = \min \{j \geq 0 : \|A(x_n - \sigma \tau^j Ax_n) - Ax_n\| \leq \theta \|Ax_n\|\}, \\ \lambda_n = \sigma \tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Вычисляем

$$\begin{cases} z_n = x_n - \lambda_n Ay_n, \\ C_n = \{z \in H : \|z - z_n\| \leq \|z - x_n\|\}, \\ Q_n = \{z \in H : (x_n - z, x_0 - x_n) \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0. \end{cases}$$

Справедлива следующая теорема о сходимости метода.

Теорема. Пусть оператор $A : H \rightarrow H$ — монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображающий ограниченные множества в ограниченные. Предположим, что $A^{-1}0 \neq \emptyset$. Тогда последовательность (x_n) , порожденная методом, сильно сходится к точке $z_0 = P_{A^{-1}0} x_0$.

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Н.В. Скрипник

Кафедра оптимального управления
и экономической кибернетики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
e-mail: talie@ukr.net

Интегральные уравнения находят многочисленные приложения в различных областях знаний таких, как теория упругости, передача тепла и массы, теория колебаний, динамика жидкости, теория фильтрации, электростатика, электродинамика, биомеханика, теория игр, теория управления, теория голосования, электротехника, экономика и медицина.

Обозначим через E^n пространство отображений $u : R^n \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) u полунепрерывно сверху по Бэру; 2) u нормально; 3) u нечетко выпукло; 4) замыкание множества $\{y \in R^n : u(y) > 0\}$ компактно.

Нечеткому интегральному уравнению с запаздыванием

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \varepsilon \int_0^t f(t, s, x(s), x(s - \tau)) ds, t > 0 \\ x(t) &= \varphi(t), t \in [-\tau, 0], x_0 = \varphi(0), \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in R_\tau = [-\tau, 0] \cup R_+$ - время, $x : R_\tau \rightarrow D \subset E^n$ - фазовая переменная, ε - малый параметр, $f : R_+ \times R_+ \times D \times D \rightarrow E^n$ - нечеткое отображение, $\tau > 0$ - запаздывание, $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow D$ - начальное нечеткое отображение, поставим в соответствие следующее усредненное нечеткое интегральное уравнение с запаздыванием

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= x_0 + \varepsilon \int_0^t \bar{f}(t, \bar{x}(s), \bar{x}(s - \tau)) ds, t \geq 0, \\ \bar{x}(t) &= \varphi(t), t \in [-\tau, 0], x_0 = \varphi(0), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{где } \bar{f}(t, x, z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t, s, x, z) ds. \quad (3)$$

В докладе рассматривается вопрос близости решений уравнений (1) и (2) на промежутке длины порядка ε^{-1} .

НОВЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

И.М. СКРЫННИК

Кафедра прикладной математики

Одесский национальный политехнический университет

Рассматривается система алгебраических уравнений

$$F(x) = 0, \quad (1)$$

где дифференцируемая функция $F: R^m \rightarrow R^m$. Для решения системы (1) строится разностная система

$$x_{n+1} = x_n + G(x_n) F(x_n), \quad (2)$$

где $G(x_n)$ — матрица, подлежащая выбору. Положения равновесия системы (2) совпадают с решениями системы (1). Выбирать матрицу $G(x_n)$ следует так, чтобы мультипликаторы положения равновесия системы (2) были бы вещественными и меньше единицы. Можно взять $G(x_n) = -[F'(x_n)]^T$, где $F(x)$ — матрица Якоби, знак T означает транспонирование.

Пусть все собственные значения матрицы $E - [F'(x^*)]^T F'(x^*)$, где E — единичная матрица, $F(x^*) = 0$, лежат в интервала $(-\mu^*, 1)$. Организуем итерационный процесс

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1} - (1 - \gamma) \left[F' \left(\sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1} \right) \right]^T F \left(\sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1} \right), \quad (3)$$

где γ и N выбираются из условий: $0 < \gamma < 1$, $\frac{4/\pi^2 N^2 + \gamma}{1 - \gamma} > \mu^*$, а коэффициенты

$$a_j = 2 \tan \frac{\pi}{2(N+1)} \left(1 - \frac{j}{N+1} \right) \sin \frac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1, \dots, N.$$

В том случае итерационный процесс будет сходиться к положению равновесия, если только начальные векторы лежат в области притяжения этого положения равновесия.

Если система (1) линейная, т. е. $Ax - b = 0$, то система (3) примет вид

$$x_{n+1} = (E - (1 - \gamma)A^T A) \sum_{j=1}^N a_j x_{n-j+1} - (1 - \gamma)A^T b. \quad (4)$$

Аналогичная схема пригодна и для обращения матриц

$$X_{n+1} = (E - (1 - \gamma)A^T A) \sum_{j=1}^N a_j X_{n-j+1} - (1 - \gamma)A^T, \quad (5)$$

где X_n — матрицы.

Итерационные процессы (4), (5) сходятся при любых начальных значениях. Преимущества этих схем перед другими методами решения линейных уравнений — это отсутствие в вычислительных процессах операций деления, что позволяет проводить вычисления с плохо обусловленными матрицами.

ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО
КЕРУВАННЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ СИСТЕМ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ
У НЕФІКСОВАНИ МОМЕНТИ ЧАСУ

О.М. Станжицький, А.О. Івашкевич

Кафедра загальної математики

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ostanzh@gmail.com, annatyarenko@bigmir.net

В даній роботі розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x, t) + B(x, t)u, \quad x \notin S \\ \Delta x|_{x \in S} &= g(x) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{1}$$

та критерієм якості

$$J(u) = \int_0^\theta L(t, x(t), u(t))dt \rightarrow \inf,\tag{2}$$

де S — деяка гіперповерхня в R^d , D — деяка область в R^d , ∂D — її межа, $\bar{D} = D \cup \partial D$, $D \cap S$ — непорожній, $x_0 \in R^d$ — фіксований вектор, $T > 0$ — фіксоване, $t \in [0, T]$, θ — момент покидання розв'язком $x(t)$ області D , $u \in U \subset R^m$, U — замкнена, опукла множина в R^m , $0 \in U$. $A(x, t)$ — d -мірна вектор-функція, $B(x, t)$ — $d \times m$ -мірна матриця, g — d -мірна вектор-функція.

Знайдені достатні умови існування оптимальних керувань за задачі (1), (2) в термінах правих частин системи та критерію якості.

АПРОКСИМАЦІЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СІМ'ЄЮ ЗАДАЧ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

О.М. СТАНЖИЦЬКИЙ, О.Є. ЛАВРОВА

Кафедра диференціальних рівнянь

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

e-mail: ostanz@gmail.com, lavrova_olia@mail.ru

Нехай T_λ — часова шкала — довільна, непорожня, замкнена підмножина дійсних чисел [1]. На часовій шкалі T_λ , $\sup T_\lambda = 0$, $\lambda \in \Lambda \subset R^1$ розглядається наступна задача оптимального керування:

$$x^\Delta = f(t, x, u), \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

$$J_\lambda(u) = \int_{[t_0, t_1]_{T_\lambda}} L(t, x(t), u(t)) \Delta t \rightarrow \inf, \quad (3)$$

де $x \in R^d$, $u(t) \in U \subset R^m$ — компакт в R^m . Для $t \in [t_0, t_1]_T$ $U_0(t) = L^\infty([t, t_1]_T, U)$ — множина обмежених, Δ -вимірних функцій, які визначені на $[t, t_1]_T$ і приймають значення в U . В задачі (1)–(3) допустими вважаються керування $u(\cdot) \in U_0(t_0)$.

Вводиться сім'я функцій Беллмана $V_\lambda(t, x)$ як

$$V_\lambda(t, x) = \inf_{u(\cdot) \in U_0(t)} J_\lambda(t, x, u). \quad (4)$$

В роботі встановлено умови збіжності функції Беллмана $V_\lambda(t_0, x)$ задачі (1)–(3) до функції Беллмана $V(t_0, x)$ неперервної задачі на інтервалі $[t_0, t_1]$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad (5)$$

$$x(t_0) = x, \quad (6)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf. \quad (7)$$

1. **M. Bohner, A. Peterson.** Advances in dynamic equations on time scales. / Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003.

ПРО ІНВАРІАНТНІ ТОРИ НЕЛІНІЙНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ
ОБМЕЖЕНИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Ю.В. ТЕПЛІНСЬКИЙ

Кафедра математики

Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка

e-mail: yuriy-teplinsky@yandex.ua

Розглянуто систему рівнянь загального виду з 2π -періодичними відносно кутових змінних φ коефіцієнтами

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = a(\varphi(t), x(t)), \quad \frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi(t), x(t), x(t+Q))x(t) + F(v(\varphi, t), x(t), x(t+\Theta))x(t+\Delta) + c(\varphi, t). \quad (1)$$

Тут $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ та $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ належать простору обмежених послідовностей $\mathbf{m}$; $a(\varphi, x) = \{a_1(\varphi, x), a_2(\varphi, x), \dots\}$; $P(\varphi, x, \chi) = [p_{ij}^1(\varphi, x, \chi)]_{i,j=1}^\infty$ та $F(v, x, \chi) = [f_{ij}(v, x, \chi)]_{i,j=1}^\infty$ — нескінченні матриці; $v = (v_1, v_2, \dots)$, де $v_i(\psi) = v_i(\psi_1, \psi_2, \dots)$; $\mathcal{T}_\infty \rightarrow R^1$ ($\psi_i \in \mathcal{T}_\infty, i \in N$), $\mathcal{T}_\infty$ — нескінченновимірний тор, а через $v(\varphi, t)$ позначено функцію $\{v_1(\psi_1(\varphi, t), \psi_2(\varphi, t), \dots), v_2(\psi_1(\varphi, t), \psi_2(\varphi, t), \dots), \dots\}$, де $\psi_i(\varphi, t) = (\varphi_{1+\Theta_{i1}}(\varphi), \varphi_{2+\Theta_{i2}}(\varphi), \dots)$, $\varphi_t(\varphi)$ — траєкторія на торі $\mathcal{T}_\infty$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi \in \mathcal{T}_\infty$; аналогічно $c(\varphi, t) = \{c_1(z_1(\varphi, t), z_2(\varphi, t), \dots), c_2(z_1(\varphi, t), z_2(\varphi, t), \dots), \dots\}$, $z_i(\varphi, t) = (\varphi_{1+\Delta_{i1}}(\varphi), \varphi_{2+\Delta_{i2}}(\varphi), \dots)$; $x(t+\Delta) = (x_1(t+\Delta_1), x_2(t+\Delta_2), \dots)$, $x(t+\Theta) = (x_1(t+\Theta_1), x_2(t+\Theta_2), \dots)$ та $x(t+Q) = (x_1(t+Q_1), x_2(t+Q_2), \dots)$. При цьому $\forall \{i, j\} \subset N$ Δ_{ij} , Δ_i , Θ_{ij} , Θ_i і Q_i — довільні дійсні числа, що визначають часові відхилення.

Інваріантним тором системи рівнянь (1) називають множину точок $x \in \mathbf{m}$, породжену функцією $x = u(\varphi) = (u_1(\varphi), u_2(\varphi), \dots)$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, якщо вона 2π -періодична відносно φ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), обмежена за нормою і $\forall \varphi \in \mathcal{T}_\infty, t \in R^1$ задовольняє рівність

$$\frac{du(\varphi_t(\varphi))}{dt} = P(\varphi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi)), u(\varphi, t+Q))u(\varphi_t(\varphi)) + F(v(\varphi, t), u(\varphi_t(\varphi)), u(\varphi, t+\Theta))u(\varphi, t+\Delta) + c(\varphi, t),$$

де $\varphi_t(\varphi)$ — розв'язок рівняння $\frac{d\varphi_t(\varphi)}{dt} = a(\varphi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi)))$ і $u(\varphi, t+\Delta) = (u_1(\varphi_{t+\Delta_1}(\varphi)), u_2(\varphi_{t+\Delta_2}(\varphi)), \dots)$.

Одержано достатні умови існування у просторі $\mathbf{m}$ інваріантного тору системи рівнянь (1).

ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКІВ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

О.С. ЧЕРНІКОВА

Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь

Механіко-математичний факультет

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

e-mail: olch@bigmir.net

Розглядаються системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x), \quad (1)$$

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x) + G_i(x), \quad (2)$$

де $x \in \mathbf{R}^n$, $t \geq 0$, $\{\tau_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, – послідовність моментів часу імпульсної дії, $\tau_{i+1} > \tau_i$, $\tau_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Встановлюються достатні умови різних типів обмеженості розв'язків системи (1) (зокрема, обмеженості розв'язків по відношенню до частини змінних [1]). При цьому застосовується метод допоміжних функцій, модифікований для випадку імпульсних систем [2, 3]. У припущенні, що розв'язки системи (1) володіють певними властивостями, для збуреної системи (2) встановлюються достатні умови еventуальної рівномірної (рівномірної граничної) обмеженості її розв'язків, а також еventуальної рівномірної асимптотичної стійкості початку координат $x = 0$ (означення відповідних понять прийнято згідно з [4, 5]). Одержані результати допускають поширення на випадок нефіксованих моментів часу імпульсної дії.

1. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
2. Гургула С.И., Перестюк Н.А. Об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Мат. Физика. – 1982. – №31. – С.9-14.
3. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations; World Scientific: Singapore–New Jersey–London, 1995. – 462 p.
4. Strauss A., Yorke J.A. Perturbing uniform asymptotically stable nonlinear systems // J. Different. Equat. – 1969. – 6, №3. – P. 452-483.
5. Bernfeld S.: Perturbing uniform ultimate bounded differential systems // SIAM J. Math. Anal. – 1972. – V.3. – №2. – P. 358-370.

МАТРИЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.М. Чуйко, А.С. Чуйко

Кафедра математики

Донбасский государственный педагогический университет

e-mail: chujko-slav@inbox.ru

Исследована задача о построении T – периодических решений

$$Z(t) \in C_{\alpha \times \beta}^1[0, T] := C^1[0, T] \otimes R^{\alpha \times \beta}$$

системы дифференциальных уравнений с запаздыванием [1]

$$dZ(t)/dt = A(t)Z(t) + Z(t - \Delta)B(t) + F(t). \quad (1)$$

Здесь $A(t) \in C_{\alpha \times \alpha}^1[0, T]$, $B(t) \in C_{\beta \times \beta}^1[0, T]$, $F(t) \in C_{\alpha \times \beta}^1[0, T]$ — непрерывные T – периодические матрицы. Вообще говоря, предполагаем $\alpha \neq \beta$. Матричная периодическая задача для уравнения (1) с запаздыванием обобщает традиционные постановки задач, как для матричных дифференциальных уравнений [1, 2], так и для дифференциальных уравнений с запаздыванием [1, 3].

Продемонстрирована возможность и эффективность перехода от матричных периодических краевых задач общего вида с запаздыванием к периодическим краевым задачам для систем уравнений с запаздыванием [2]. Найдены условия существования, а также схема построения T – периодических решений системы (1). Для решения поставленной задачи использованы оригинальные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной матричной краевой задачи [1, 2].

1. **Boichuk A.A.** Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV. 317 p.
2. **Chuiko S.M.** The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem / S.M. Chuiko // Siberian Mathematical Journal. — 2015. — 56, № 4. — pp. 752–760.
3. **Chuiko S.M., Chuiko A.S.** On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case / S.M. Chuiko, A.S. Chuiko // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — 14. — 2012. № 3. С. 445–460.

АСИМПТОТИКА НЕКОЛИВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Н.В. ШАРАЙ¹, В.М. ШИНКАРЕНКО²

¹Кафедра диференціальних рівнянь

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

²Кафедра ММАЕ

Одеський національний економічний університет

e-mail: shinkar@te.net.ua, rusnat@i.ua

Розглядається диференціальне рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^\sigma, \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega) \rightarrow (0, +\infty)$ – неперервна функція, $\sigma \in R$, $\infty < a < \omega \leq +\infty$. Воно належить класу рівнянь вигляду

$$y''' = \alpha_0 p(t) L(y), \quad (2)$$

в якому $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega) \rightarrow (0, +\infty)$ – неперервна функція, $\infty < a < \omega \leq +\infty$, функція L неперервна и додатня в односторонньому околі Δ_{Y_0} точки Y_0 (Y_0 дорівнює або нулеві, або $\pm\infty$).

Розв'язок y рівняння (1), який заданий на проміжку $[t_y, w) \subset [a, \omega)$ називаємо $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язком, якщо він задовольняє наступні вимоги:

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm \infty, \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0$$

У роботі [1] було отримано результати у випадку, коли граничне значення $\lambda_0 \in R \setminus \{0, 1, -1, \frac{1}{2}\}$. Наступним кроком є встановлення умов існування у рівняння (1) $P_\omega(\pm\infty)$ -розв'язків, а також $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків у критичних випадках, тобто для $\lambda_0 \in \{0, 1, -1, \frac{1}{2}\}$.

Для кожного з таких значень отримано умови існування у рівняння (1) $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків, а також асимптотичні розвинення при $t \uparrow \omega$ таких розв'язків та їх похідних до другого порядку.

1. **Шинкаренко В.Н.** Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, близких к линейным / В.Н. Шинкаренко, Н.В. Шарай // Нелінійні коливання, – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 133–144.

СИНТЕЗ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

В.Ф. ЩЕРБАК

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск
e-mail: Scherbakvf@ukr.net

Предложен метод синтеза инвариантных соотношений, разработанный для определения неизвестных компонент математической модели системы вход–выход

$$\dot{x} = f(x, a), \quad y = h(x), \quad x \in R^n, a \in R^q, y \in R^k. \quad (1)$$

Здесь x – вектор состояния системы, a – вектор параметров, y – выход, значения которого известны на любом решении системы (1).

Обратные задачи управления состоят в определении неизвестных $x(t), a$ по значениям выхода $y(t)$. Метод синтеза предполагает динамическое расширение исходной системы, за счет введения управляемой подсистемы

$$\dot{\xi} = u(\xi, h(x)), \quad \xi \in R^p \quad (2)$$

Далее решается специальная задача управления, а именно: управления $u(\xi, h(x))$ используются для синтеза соотношений

$$\Psi_i(x, a, y, \xi) = 0, \quad i = \overline{1, n + q - k}, \quad (3)$$

инвариантных для расширенной системы (1),(2). Такие соотношения рассматриваются в качестве дополнительных уравнений, связывающих неизвестные компоненты математической модели (фазовый вектор, параметры) и известные величины $y(t), \xi(t)$.

Предложена процедура синтеза управлений, обеспечивающих существование широкого семейства дифференцируемых функций, порождающих инвариантные соотношения. Задачи наблюдения, идентификации параметров сводится к выбору таких функций из полученного семейства, которые гарантируют асимптотическое стремление к нулю отклонений от соответствующего (3) инвариантного многообразия. Описанная схема построения дополнительных конечных соотношений распространена также на задачи синхронизации траекторий нелинейных динамических систем, а также на задачи стабилизации.

БЛОЧНЕ РОЗЩЕПЛЕННЯ ЛІНІЙНОЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З КОЕФІЦІЄНТАМИ КОЛИВНОГО ТИПУ

С.А. ЩОГОЛЕВ

Кафедра вищої математики

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

e-mail: sergas1959@gmail.com

Розглядається наступна система диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_j}{dt} = H_j(\varphi)x_j + \mu \sum_{k=1}^2 B_{jk}(t, \varepsilon, \theta)x_k, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

де $x_1 = \text{colon}(x_{11}, \dots, x_{1N_1})$, $x_2 = \text{colon}(x_{21}, \dots, x_{2N_2})$,

$$H_1(\varphi) = \begin{pmatrix} ip\varphi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & ip\varphi & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & ip\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & ip\varphi \end{pmatrix}, \quad H_2(\varphi) = \begin{pmatrix} ir\varphi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & ir\varphi & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & ir\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & ir\varphi \end{pmatrix}$$

– $\dim H_j(\varphi) = N_j$; $p, r \in \mathbf{Z}$; $B_{jk}(t, \varepsilon, \theta) - (N_j \times N_k)$ – матриці з елементами з класу $F(m; \varepsilon; \theta)$; $\varphi = \varphi(t, \varepsilon)$ – функція, що фігурує в означенні класу $F(m; \varepsilon; \theta)$; $\mu \in (0, 1)$ (означення класу $F(m; \varepsilon; \theta)$ наведено в [1]).

Отримано умови, за яких існує перетворення вигляду

$$x_j = L_{j1}(t, \varepsilon, \theta, \mu)\tilde{x}_1 + L_{j2}(t, \varepsilon, \theta, \mu)\tilde{x}_2, \quad j = 1, 2,$$

де елементи $(N_j \times N_k)$ -матриць L_{jk} ($j, k = 1, 2$) належать до класу $F(m - 1; \varepsilon_1; \theta)$ ($0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$), що зводить систему (1) до вигляду:

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt} = D_{N_j}(t, \varepsilon, \theta, \mu)\tilde{x}_j, \quad j = 1, 2,$$

де елементи $(N_j \times N_j)$ -матриць D_{N_j} ($j = 1, 2$) також належать до класу $F(m - 1; \varepsilon_1; \theta)$.

1. **Shchogolev S.A.** On the block separation of the linear homogeneous differential System with oscillating coefficients in the resonance case // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 63 (2014), pp. 123-140.

О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В МЕТОДЕ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

ЮХИМЕНКО Б.И.

Кафедра прикладной математики

Одесский национальный политехнический университет

Комбинаторные методы дискретной оптимизации относятся по сложности вычислений к классу NP -полных алгоритмов. Не существует ни теоретических, ни прикладных подтверждений ускорения скорости сходимости настолько, чтобы экспонентную сложность привести к полиномиальной. В связи с этим любое предположение как-то ускорить вычислительный процесс решения оптимальных дискретных задач актуальна и своевременна.

Метод ветвей и границ решения задач целочисленного линейного программирования содержит множество моментов подлежащих модификацией. Основной подход расширения (сужения) множества вариантов с целью получения оценки позволяет по разному структурировать систему ограничений. Основные из них: приведения задачи целочисленной оптимизации к линейной, разбиения множества ограничивающих условий на блоки, и наконец, к решению ряда одномерных задач о ранце. Естественно все это уменьшает точность получаемых оценок, но простота решения задач с целью получения оценок покрывает саму вычислительную сложность всего алгоритма.

Способы разбиения множества вариантов на подмножества начинается с подхода Лэнд и Дойк до использования идеи последовательного построения решения как средства ветвления. Ветвление осуществляется путем конкретизации компонент вектора решений. Такой способ также не является окончательным приемом. Определение последовательности конкретизируемых компонент можно вести различными способами. К примеру, учет влияния компонент вектора стоимостей на величину значения целевой функции, а также учет изменения величин неувязок в системе ограничений. Значительно увеличивает количество отсекающих неперспективных подмножеств вариантов решения.

Еще один момент подлежащий модификации алгоритмов метода это использование идеи функций предпочтений при подборе ветви дерева решений в поиске варианта лучше, чем уже име-

ющийся вариант и предопределяющий рекорд на данном этапе частичного перебора вариантов.

Комбинирование всех перечисленных подходов позволяет создать новые алгоритмы метода и вести поиск более эффективных алгоритмов. Нерешенной проблемой является классификация задач по структурным признакам и подбора алгоритмов более эффективных для конкретного класса задач. Вопрос классификации задач сложный. Трудно подобрать параметры классификации задач на классы, предопределяющих алгоритмы вычислений.

ДОСЛІДЖЕННЯ p -КРОКОВОГО АЛГОРИТМУ
МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

А.Т. ЯРОВИЙ, Є.М. СТРАХОВ

Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
e-mail: strakhov.e.m@onu.edu.ua

Розглядається задача

$$\varphi(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

де $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ є неперервно диференційовною функцією.

Для її розв'язання будемо застосовувати p -кроковий метод з таким алгоритмом:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, \dots, \\ s^0 &= -\varphi'(x^0), \\ s^k &= -\varphi'(x^k) + \gamma_1^{k-1} s^{k-1} + \gamma_2^{k-2} s^{k-2} + \dots + \gamma_{p-1}^{k-(p-1)} s^{k-(p-1)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де x^0 — задана початкова точка, $x^1, \dots, x^k, \dots$ — послідовні наближення, $s^0, \dots, s^k, \dots$ — напрямки спуску, β_k — крок вздовж напрямку спуску, γ_j^{k-j} ($j = \overline{1, p-1}$) — числові параметри.

Кроки вздовж напрямку спуску визначаємо з умови

$$\beta_k : \min_{\beta > 0} \varphi(x^k + \beta s^k), \quad (3)$$

параметри γ_j^{k-j} ($j = \overline{1, p-1}$) розраховуємо за формулами

$$\gamma_j^{k-j} = \frac{(\varphi'(x^k), \varphi'(x^{k-j+1}) - \varphi'(x^{k-j}))}{\|\varphi'(x^{k-j})\|^2}. \quad (4)$$

У роботі показано, що метод (2)–(4) належить до методів спряжених напрямків. Порівняння результатів роботи алгоритму для тестових функцій із невеликою кількістю змінних вказує на те, що алгоритм (2)–(4) при $p = 3$ є ефективнішим за метод спряжених градієнтів Полака — Ріб'єра — Поляка. При збільшенні параметру p далі ($p = 4, 5, \dots$) суттєвих переваг порівняно з випадком

$p = 3$ не отримаємо. До уваги бралися такі критерії, як відхилення кінцевого значення функції від оптимального та кількість зроблених ітерацій. Під однією ітерацією розуміємо обчислення нового наближення x^{k+1} , виходячи з x^k . Зауважимо, що кількість обчислень значень цільової функції та її градієнту не зростає при збільшенні параметру p .

1. **Карманов В.Г.** Математическое программирование / В.Г. Карманов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 264 с.
2. **Сухарев А.Г.** Курс методов оптимизации / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 368 с.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Н. В. ЖОГОЛЕВА, В. Ф. ЩЕРБАК

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск
e-mail: Scherbakvf@ukr.net

Во многих приложениях физики, биологии [1] в качестве модели нелинейных циклических процессов, имеющих устойчивый предельный цикл и убывающую с ростом частоты амплитуду, используют уравнение Ван Дер Поля

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2, \quad (1)$$

где x_1 — отклонение от положения равновесия, μ , ω — коэффициенты, характеризующие демпфирование и частоту колебаний. Одной из задач, возникающих при моделировании биологических функций организма, является задача определения скорости $x_2(t)$ и параметра ω в предположении, что положение $x_1(t)$ известно.

В данном сообщении задача нахождения $x_2(t)$ и ω рассмотрена как задача наблюдения и одновременной идентификации системы (1). Решение основано на методе синтеза инвариантных соотношений [2], позволяющего получать асимптотические оценки неизвестных. Полученная схема распространена на задачу наблюдения и идентификации механической системы, состоящей из n соединенных между собой осцилляторов Ван дер Поля

$$\dot{x}_{i1} = x_{i2}, \quad \dot{x}_{i2} = -\omega_i^2 x_{i1} + \mu_i(1 - x_{i1}^2)x_{i2} + \sum_{j=1}^n k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}). \quad (2)$$

В частности, случай $n = 2$ описывает распространенную модель сердечной деятельности, а $n = 3$ модель ходьбы человека [1].

1. **Кузнецов А. П.** Феномен уравнения ван дер Поля / А.П. Кузнецов, Е. С. Селиверстова, Д. И. Трубецков, Л. В. Тюрюкина // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3-42.
2. **Жоголева Н.В.** Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления / Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т.29. – С. 69-76.

Именной указатель

- Anelchuk A. V., 15
Gaiko V. A., 16
Glazunov N., 17
Kharchenko V., 17
Kichmarenko O. D., 19
Kitanov N. M., 18
Kolomiichuk N. M., 20
Sapozhnikova K., 19
Strakhov Ye.M., 15, 20
Акуленко Л. Д., 21
Башняков О. М., 22
Громов В. А., 46
Дашковський С., 30
Денисов С. В., 56
Джашитова В. В., 23
Дмитришин Д. В., 24
Жуковский В. И., 26
Жоголева Н. В., 72
Зинкевич Я. С., 21
Івашкевич А. О., 60
Калинин А. И., 29
Капустян О., 30
Капустян О. А., 31
Кичмаренко О. Д., 32, 45
Клишук Б. А., 55
Козаченко Т. А., 21
Колмакова Л. Н., 36
Кольцова Л. Л., 34
Комарницкий А. Л., 36
Комлева Т. А., 53
Коробов В. И., 37
Корхов К. А., 32
Кузина Ю. В., 38
Кусик Л. И., 39
Кучук-Яценко С. В., 40
Лавринович Л. И., 29
Лаврова О.Є., 61
Лещенко Д. Д., 21, 41
Лиманская Д. Е., 42
Любарщук Е. А., 43
Мишура Ю. С., 40
Мунчак Є.Ю., 40
Натальчишин М. И., 45
Неласая А. В., 54
Ободан Н. И., 46
Огуленко А. П., 48
Пічкур В. В., 22, 50
Плотников А. А., 52
Плотников А. В., 53
Плотникова Л. И., 53
Поліщук О. А., 22
Полюга С. И., 54
Рачинская А. Л., 41
Романюк І., 30
Салимов Р. Р., 55
Семенов В. В., 56
Скрипник Н. В., 57
Скрынник И. М., 58
Станжицький О. М., 60, 61
Стоколос А. М., 24
Страхов Є.М., 70
Теплінський Ю. В., 62
Чернікова О. С., 63
Чуйко А. С., 64
Чуйко С. М., 64
Шарай Н. В., 65
Шинкаренко В. М., 65
Щербак В. Ф., 66, 72
Щоголев С. А., 67
Юхименко Б. И., 68
Яровий А. Т., 70

Міжнародна літня математична школа пам'яті В. О. Плотнікова

11–16 червня 2018 р.

Шановні колеги!

Запрошуємо вас прийняти участь у Міжнародній літній математичній школі пам'яті В. О. Плотнікова, яка проводитиметься в Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова в червні 2018 року.

Конференція буде присвячена 80-річчю від дня народження Віктора Олександровича Плотнікова, відомого в Україні та за її межами математика, засновника наукової школи з теорії асимптотичних методів дослідження диференціальних рівнянь з багатозначною правою частиною.

У програму школи можуть бути включено доповіді за наступними напрямками:

- асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь і оптимального керування;
- математичні методи оптимального керування;
- багатозначні рівняння і включення;
- якісна теорія в теорії диференціальних рівнянь і оптимального керування;
- математичне моделювання;
- теорія ігор

Доповіді, рекомендовані програмним комітетом, будуть опубліковані в науковому журналі «Дослідження в математиці і механіці».

Інформація щодо школи розміщується в мережі Інтернет за адресою:

www.plotnikovschool.onu.edu.ua

Запрошуємо до співпраці!

Науковий журнал

*«Дослідження в математиці і механіці»**

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» заснований в 1997 році під назвою «Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка». Його мета — інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами. До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи. Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

*Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»*

www.rmm-journal.onu.edu.ua
rmm-journal@onu.edu.ua

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2
м. Одеса, 65082

* Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Наукове видання

**Міжнародна літня
математична школа
пам'яті В. О. Плотнікова**

12—17 вересня 2016 р., м. Одеса, Україна

Тези доповідей

Укладач і відповідальний редактор
кандидат фізико-математичних наук, доцент
КІЧМАРЕНКО Ольга Дмитрівна

Українською, російською та англійською мовами

Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Редактор *Н. Я. Рихтік*
Технічний редактор *М. М. Бушин*
Дизайнер обкладинки *В. І. Костецький*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 4,65.
Тираж 60 прим. Зам. № 374(76).

Надруковано з готового оригінал-макету

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.